$\alpha + \omega$, 2003, Nr. 3, 63–65

Dar kartą apie dalumą

Leonas Narkevičius
leonasn@gim.ktu.lt

Ankstesniuose žurnalo numeriuose jau nagrinėjom lyginių ir nelyginių skaičių savybes, taip pat *dalumo* savybes. Šiame straipsnelyje į dalumą pažvelgsime šiek tiek kitaip.

Apibrėžimas. *Sakysime, kad sveikasis skaičius m dalijasi iš sveikojo skaičiaus n, arba n yra skaičiaus m daliklis, jei egzistuoja toks sveikasis skaičius k, kad $m = n \cdot k$. Tai žymėsime taip: $n|m$ arba $m \vdots n$.*

Dalumo savybės

1) *jei* $b \vdots a$ *ir* $c \vdots a$, *tai* $(b \pm c) \vdots a$;

2) *jei* $b \vdots a$, *tai* $bk \vdots a$;

3) *jei* $b_1 \vdots a, b_2 \vdots a, \ldots, b_n \vdots a$, *tai* $(b_1k_1 + b_2k_2 + \cdots + b_nk_n) \vdots a$;

4) *jei* $b \vdots a$ *ir* $c \vdots b$, *tai* $c \vdots a$;

5) *jei* $c \vdots a$ *ir* $d \vdots b$, *tai* $(c \cdot d) \vdots (a \cdot b)$;

6) *jei* $a, b \in N$, $b \vdots a$ *ir* $a \vdots b$, *tai* $a = b$.

Pavyzdžiai

1. *Duota, kad a dalijasi iš 7. Įrodykime, kad skaičius $a^2 + 3a + 7b - 21$ dalijasi iš 7.*

Įrodymas. Kadangi $a \vdots 7$, tai $a^2 \vdots 7$ ir $3a \vdots 7$ (2 savybė);

Kadangi $7b \vdots 7$ ir $21 \vdots 7$. Taigi, iš 7 dalijasi ir visų šių skaičių suma (3 savybė).

2. *Duota, kad $a \vdots n$ ir $(5a + b) \vdots n$. Įrodykime, kad $b \vdots n$.*

Įrodymas. $b = (5a + b) - 5a$. Kadangi $(5a + b) \vdots n$ ir $5a \vdots n$ (nes $a \vdots n$), tai n yra šių skaičių bendrasis daliklis, t. y. $b \vdots n$.

3. *Duota, kad $(5a + 3b) \vdots n$ ir $(3a + 2b) \vdots n$. Įrodykime, kad $a \vdots n$ ir $b \vdots n$.*

Įrodymas. Padauginkime $5a + 3b$ iš 2 ir $3a + 2b$ iš 3. Atėmę antrą išraišką iš pirmosios, gauname: $(5a + 3b) \cdot 2 - (3a + 2b) \cdot 3 = a$. Kadangi $(5a + 3b) \vdots n$ ir $(3a + 2b) \vdots n$, tai $a \vdots n$ (3 savybė).

Analogiškai įrodome, kad $b \vdots n$, nes $b = 5 \cdot (3a + 2b) - 3 \cdot (5a + 3b)$.

4. *Duota, kad $(a - b) \vdots n$. Įrodykime, kad $(a^2 + a - b^2 - b) \vdots n$.*

Įrodymas. Tai išplaukia iš lygybės $a^2 + a - b^2 - b = (a - b)(a + b + 1)$ ir 2 savybės.

5. *Duota, kad* $(3a+4b) \vdots 5$ *ir* $(2a+3b) \vdots 5$. *Įrodykime, kad* $a \cdot b \vdots 25$.

Įrodymas. $b = 3 \cdot (2a+3b) - 2 \cdot (3a+4b)$, tai $b \vdots 5$. Analogiškai $a = 3 \cdot (3a+4b) - 4 \cdot (2a+3b)$, todėl $a \vdots 5$. Iš to, kad $a \vdots 5$ ir $b \vdots 5$, gauname $(a \cdot b) \vdots (5 \cdot 5)$ (5 savybė).

6. *Ar skaičius* 101 *yra pirminis?*

Sprendimas. $\sqrt{101} < 11$. Lieka patikrinti tiktai skaičiaus 101 dalumą iš pirminių skaičių nuo 2 iki 10, t. y. iš skaičių 2, 3, 5 ir 7. Matome, kad skaičius 101 nesidalija iš 2, 3, 5, ir 7. Taigi 101 yra pirminis skaičius.

7. *Raskime visus pirminius skaičius iš intervalo* [100; 120].

Sprendimas. Kadangi $\sqrt{120} < 11$, tai reikia patikrinti skaičių nuo 100 iki 120 dalumą iš pirminių skaičių, mažesnių už 11, t. y. iš 2, 3, 5 ir 7. Surašykime visus šiuos skaičius paeiliui ir pabraukime tuos, kurie dalijasi iš 2, 3, 5 ar 7:

$$\underline{100}\ 101\ \underline{102}\ 103\ \underline{104}\ \underline{105}\ \underline{106}\ 107\ \underline{108}\ 109\ \underline{110}\ \underline{111}\ \underline{112}\ 113\ \underline{114}\ \underline{115}\ \underline{116}\ \underline{117}\ \underline{118}\ \underline{119}\ \underline{120}.$$

Nepabraukti skaičiai 101, 103, 107, 109, 113 yra pirminiai.

8. *Su kuriomis* n *reikšmėmis skaičius* $n^2 - 1$ *yra pirminis?*

Sprendimas. Žinoma, kad $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$. Tada, jei $n - 1 > 1$, tai $n^2 - 1$ nėra pirminis, nes $n - 1$ yra jo daliklis, be to, $n - 1 \neq 1$ ir $n - 1 \neq n^2 - 1$. Belieka patikrinti reikšmes $n = 1$ ir $n = 2$. Jei $n = 1$, tai $n^2 - 1 = 0$ nėra pirminis. Jei $n = 2$, tai $n^2 - 1 = 3$ yra pirminis.

9. *Ar skaičiai* 171 717 *ir* 151 514 *dalijasi iš skaičių* 2, 4, 8, 5, 3, 9, 11?

Sprendimas. Skaičius 171 717 nesidalija iš 2, 4, 8, nes paskutinis skaičiaus skaitmuo 7 yra nelyginis skaičius; nesidalija iš 5, nes paskutinis skaitmuo ne 0 ir ne 5; dalijasi iš 3, nes skaitmenų suma $1+7+$ $+1+7+1+7 = 24$ dalijasi iš 3; nesidalija iš 9, nes $1+7+1+7+1+7 = 24$ nesidalija iš 9; nesidalija iš 11, nes $(7+7+7) - (1+1+1) = 18$ nesidalija iš 11.

Skaičius 151 514 dalijasi iš 2, nes 4 dalijasi iš 2; nesidalija iš 4 ir 8, nes 14 nesidalija iš 4, 514 nesidalija iš 8; nesidalija iš 3 ir 9, nes $1+5+1+5+1+4 = 17$ nesidalija nei iš 3, nei iš 9; dalijasi iš 11, nes $(5+5+4) - (1+1+1) = 11$ dalijasi iš 11.

10. *Įrašykime žvaigždutės vietoje vieną skaičiaus* 3125∗ *skaitmenį taip, kad gautasis skaičius dalytųsi iš:* a) a; b) 9; c) 11.

Sprendimas. a) Reikia įrašyti skaičių 6, nes 256 dalijasi iš 8, o įrašius kitus skaitmenis, gautasis triženklis skaičius iš 8 nesidalija.

b) Įrašius skaitmenį a, skaitmenų suma bus $3+1+2+5+a = 11+a$. Tam, kad ši suma dalytųsi iš 9, turi būti $a = 7$.

c) Jei įrašysime skaitmenį a, tai $(3+2+a) - (1+5) = a - 1$ turi dalytis iš 11. Vienintelis skaitmuo, tenkinantis šią lygybę, yra $a = 1$.

11. *Įrodykime, kad skaičiaus* n, *kuris dalijasi iš* 33, *skaitmenų suma yra ne mažesnė už* 6.

Įrodymas. Skaičiaus n skaitmenų, esančių nelyginėse pozicijose, sumą pažymėkime A, o skaitmenų, esančių lyginėse pozicijose, sumą pažymėkime B. Kadangi n dalijasi iš 3, tai $(A+B) \vdots 3$; kadangi $n \vdots 11$, tai $(A-B) \vdots 11$. Jei $A + B = 3$, tai $|A - B| \leqslant 3$ ir iš savybės $(A-B) \vdots 11$ gauname, kad $A - B = 0$. Išsprendę sistemą $A + B = 3$, $A - B = 0$, matome, kad ji neturi sveikųjų sprendinių. Tada $A + B \neq 3$, todėl $A + B \geqslant 6$.

12. *Duota, kad* $(2a+3b) \vdots 7$. *Įrodykime, kad* $(a+5b) \vdots 7$.

Įrodymas. Iš sąlygos išplaukia, kad $4 \cdot (2a+3b) \vdots 7$, t. y. $(8a+12b) \vdots 7$. Tada ir $a + 5b = [8a + 12b - 7 \cdot (a+b)] \vdots 7$.

Uždaviniai

1. Duota, kad $3a \vdots n$ ir $(12a + 5b) \vdots n$. Įrodykite, kad $10b \vdots n$.

2. Įrodykite, kad su visais natūraliaisiais n, $n^2 + n + 6$ dalijasi iš 2.

3. Duota, kad $(3a + 7b) \vdots n$ ir $(2a + 5b) \vdots n$. Įrodykite, kad $a \vdots n$ ir $b \vdots n$.

4. Duota, kad $(a - b) \vdots n$. Įrodykite, kad $(a^3 + a^2 - b^3 - b^2) \vdots n$.

5. Duota, kad $(a + b) \vdots n$. Įrodykite, kad $(a^3 + 2a + b^3 + 2b) \vdots n$.

6. Trupmena $\frac{a}{b}$ yra suprastinama. Ar trupmena $\frac{a-b}{a+b}$ yra suprastinama? Ir atvirkščiai, jei žinoma, kad trupmena $\frac{a-b}{a+b}$ yra suprastinama, ar trupmena $\frac{a}{b}$ būtinai yra suprastinama?

7. Duota, kad $(3x + 7y) \vdots 11$ ir $(2x + 5y) \vdots 11$. Įrodykite, kad $(x^2 + 3y^2) \vdots 121$.

8. Kurie iš skaičių 141, 143, 155, 161, 163 yra pirminiai?

9. Raskite visus pirminius skaičius iš intervalo [180; 200].

10. Su kuriomis n reikšmėmis skaičius $n^3 - 1$ yra pirminis?

11. Su kuriomis natūraliosiomis n reikšmėmis skaičius $n^2 + 5n + 6$ pirminis?

12. Su kuriomis natūraliosiomis m ir n reikšmėmis skaičius $(n - m)(n^2 + m - 1)$ yra pirminis?

13. Raskite bent vieną n, kad intervale $[n; n + 10]$ nebūtų nei vieno pirminio skaičiaus.

14. Ar skaičiai 31 416, 271 828, 222 222, 123 456 dalijasi iš 3, 9, 2, 4, 8, 11?

15. Įrodykite, kad: a) 111 dalijasi iš 3; b) 111111111 dalijasi iš 9; c) 11...1 (27 vienetai) dalijasi iš 27; d) 11...1 (81 vienetas) dalijasi iš 81; e*) 11...1 (3^n vienetų) dalijasi iš 3^n.

16. Įrodykite, kad 9-ženklis skaičius, kurį sudaro kiekvienas iš skaitmenų $1, 2, \ldots, 9$ tik vieną kartą, dalijasi iš 9.

17. Duotas 100-ženklis skaičius A, kuris dalijasi iš 9. B yra skaičiaus A skaitmenų suma; C yra skaičiaus B skaitmenų suma; D yra skaičiaus C skaitmenų suma. Kam lygus skaičius D?

18. Įrodykite, kad skaičius $\overline{abba}$ dalijasi iš 11.

19. Ar skaičius, kurio skaitmenų suma lygi 5, gali dalytis iš 11?

20. Įrodykite, kad skaičiaus, kuris dalijasi iš 99, skaitmenų suma yra ne mažesnė už 18.

21. Įrašykite žvaigždutės vietoje tokį skaitmenį, kad skaičius $12345*$ dalytųsi iš:
a) 9, b) 8, c) 11.

22. Įrašykite žvaigždutės vietoje tokį skaitmenį, kad skaičius $199 * 94$ dalytųsi iš: a) 9; b) 11.

23. Įrašykite žvaigždučių vietose tokius skaitmenis, kad skaičius $15 * *15$ dalytųsi iš 99.

24. Skaičius $a + 4b$ dalijasi iš 13. Įrodykite, kad ir $10a + b$ dalijasi iš 13.

25. Skaičius $3a + 7b$ dalijasi iš 11. Įrodykite, kad ir skaičius $4a + 2b$ dalijasi iš 11.