$\alpha + \omega$, 2003, Nr. 3, 6–15

XV prof. Jono Matulionio jaunųjų matematikų konkursas

V. Karpickaitė, L. Papreckienė, V. Pekarskas
laima.papreckiene@fmf.ktu.lt, vidmantas.pekarskas@fmf.ktu.lt

2004 m. sausio 31 d. KTU Fundamentaliųjų mokslų fakultete įvyko tradicinis prof. Jono Matulionio jaunųjų matematikų konkursas, kuriame dalyvavo 502 IX–XII klasių moksleiviai iš 77 Lietuvos gimnazijų bei vidurinių ar pagrindinių mokyklų. Šis konkursas jau penkioliktasis. Nors ir kuklus, bet jubiliejus. Jau pastebėjome ir kai kuriuos dėsningumus. Daugelis mokinių yra nuolatiniai konkurso dalyviai, o kai kurie iš jų ir kasmečiai prizininkai. Galime išskirti ir mokytojus, kurių ruošiami auklėtiniai dalyvauja kasmet ir laimi prizus. Tai kauniškiai mokytojai B. ir L. Narkevičiai, P. Tvarijonas, vilniškiai A. Skūpas, I. Bagdonienė, kretingiškis V. Narmontas, šiaulietės P. Grebeničenkaitė, A. Rimkevičienė, visaginietės J. Mackevičienė, N. Sokolko, J. Sviderskaja ir daugelis kitų.

Daugiau kaip 160 mokinių, taigi apytiksliai 30% dalyvių, sėkmingai išsprendė tris ir daugiau uždavinių, tad nelengva buvo išskirti geriausius darbus. Džiaugiamės, kad į konkursą atvyksta ir aštuntokai, kad jie įveikia devintos klasės užduotį, ateityje laukiame jų gausesnio būrio.

Pateikiame visas konkurso užduotis ir jų sprendimus. Kai kurie sprendimai yra pasiūlyti pačių konkurso dalyvių.

IX klasės užduotis

1. Kuriame ketvirtyje yra $\sqrt{\pi}$ radianų kampas? (3 *taškai*)

2. Įmonė turi pasiųsti užsakovui 1100 detalių. Siuntimui paruoštos trijų rūšių dėžės, kurių vienoje telpa 70 detalių, kitoje — 40, trečioje — 25 detalės. Didžiausios dėžės persiuntimo kaina yra 20 Lt, vidutinės — 10 Lt, o mažiausios — 7 Lt. Kiek ir kurių dėžių reikia pripildyti, kad persiuntimo kaina būtų mažiausia? (4 *taškai*)

3. Įrodykite, kad $(64^3 - 8^5 - 4^7)^n$ dalijasi iš 13, nesvarbu koks būtų natūralusis skaičius n. (4 *taškai*)

4. Per stačiakampio $ABCD$ viršūnes A ir B nubrėžtas apskritimas, liečiantis kraštinę CD jos vidurio taške. Iš taško D nubrėžta tiesė, liečianti apskritimą taške E ir susikertanti su kraštinės AB tęsiniu taške K. Apskaičiuokite trapecijos $BCDK$ plotą, jei $AB = 10$, o $KE : KA = 3 : 2$. (5 *taškai*)

5. Apskaičiuokite x ir y, jeigu $(3x + 2y)^{2004} + (x - 2)^2 = 0$. (4 *taškai*)

X klasės užduotis

1. Kuris dviženklis skaičius lygus jo skaitmenų sumos kvadratui? (3 *taškai*)

2. Smailiojo trikampio ABC visas kraštines sutrumpinus 4 ilgio vienetais, sudarytas bukasis trikampis CDE, kurio visų kraštinių ilgiai išreiškiami sveikaisiais skaičiais: $CD = k$, $DE = k + 1$, $EC = k + 5$. Apskaičiuokite trikampio CDE perimetrą P, kai $P < 30$. (5 *taškai*)

3. Įrodykite, kad skaičiai $(n^2 + 1)$ nesidalija iš 3, kad ir koks bebūtų natūralusis skaičius n. (3 *taškai*)

4. Jonui ir Petrui, kurių bendrą biblioteką sudaro 378 knygos, tėvai nupirko po vienodą knygų spintą. Jonas, sudėjęs į kiekvieną spintos lentyną po 16 knygų, sutalpino visas savo knygas. Petrui, sudėjusiam po 15 knygų į lentyną, dalis knygų netilpo, o dedant po 17 knygų, viena lentyna liko tuščia. Kiek knygų turėjo Petras ir po kiek lentynų buvo kiekvienoje spintoje? (5 *taškai*)

5. Su kuriomis parametro a reikšmėmis lygčių sistema

$$\begin{cases} ax - y = 3, \\ (a+1)x^2 + (2-a)x - y = 2 \end{cases}$$

turi vienintelį sprendinį? (4 *taškai*)

XI klasės užduotis

1. Nubraižykite funkcijos $y = |3x - 2|$ grafiką ir raskite grafiko taško T, esančio arčiausiai taško $P(3; 0)$, koordinates bei atstumą TP. (3 *taškai*)

2. Trikampio kraštines a, b ir c sieja lygybė

$$\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}.$$

Raskite prieš kraštinę c esančio kampo didumą. (4 *taškai*)

3. Žvalgas turi perduoti į centrą informaciją — natūraliųjų skaičių rinkinį $\{A, B, C, D\}$. Siekdamas ypatingo slaptumo jis pasiuntė rinkinį $\{A + B, A + C, A + D, B + C, B + D\}$, tačiau kokia tvarka jis siuntė šiuos skaičius — nežinoma. Gavęs skaičius 13, 15, 16, 20, 22, centras iššifravo pranešimą ir surado tuos keturis skaičius. Kokius skaičius žvalgas pasiuntė į centrą? (4 *taškai*)

4. Su kuriomis parametro r reikšmėmis sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r, \\ x - y = r \end{cases}$$

turi vienintelį sprendinį? (4 *taškai*)

5. Atstumas tarp kaimo K ir miesto M lygus 7 km. Iš K į M ir iš M į K tuo pačiu metu išėjo du keleiviai, kurie susitiko greičiau kaip po valandos. Jeigu iš K išėjusiojo greitis būtų dvigubai didesnis, o kitas keleivis savo greitį būtų padidinęs 2 km/h, tai šis antrasis nuo M iki susitikimo būtų nuėjęs didesnę kelio dalį. Kurio iš keleivių greitis didesnis? (5 *taškai*)

XII klasės užduotis

1. Raskite keturis iš eilės parašytus natūraliuosius skaičius, kurių atvirkštinių skaičių suma lygi $\frac{19}{20}$. (3 *taškai*)

2. Stačiosios prizmės $ABCA_1B_1C_1$ pagrindas yra statusis lygiašonis trikampis ABC, kurio statinių ilgiai $AB = BC = 1$ dm. Per AB ir BC vidurio taškus ir tašką P, esantį briaunos B_1B tęsinyje atstumu $BP = \frac{1}{2}$ dm, nubrėžta plokštuma, kuri kerta prizmę. Raskite gautojo prizmės pjūvio plotą S, kai $B_1B = 1$ dm. (4 *taškai*)

3. Išspręskite lygtį $\log_3(\sqrt{x} + |\sqrt{x} - 1|) = \log_9(4\sqrt{x} - 3 + 4|\sqrt{x} - 1|)$. (4 *taškai*)

4. Raskite visas teigiamas parametro a reikšmes, su kuriomis visi skirtingi neneigiami lygties

$$\cos(9ax - 7x) = \cos(17ax + 13x)$$

sprendiniai, išdėstyti didėjimo tvarka, sudaro aritmetinę progresiją. (5 *taškai*)

5. Penki piratai dalijasi 10 vienodų aukso luitų, siekdami pasiimti maksimalų jų kiekį. Taip jau įprasta, kad pirmiausia dalybų variantą siūlo vyriausias piratas. Tačiau jei daugiau kaip pusė piratų jam nepritartų, jis būtų pašalintas iš dalybų. Tada vyriausias amžiumi iš likusių keturių piratų siūlytų savo variantą. Jei dauguma jo siūlymą atmestų, tai ir jis negautų nieko, ir dalybas tęstų trys, o vėliau galbūt du piratai. Paaiškinkite, kiek kuriam teks aukso luitų. (4 *taškai*)

IX klasės užduoties sprendimai

1. $\sqrt{\pi}$ radianų kampas yra antrame ketvirtyje, nes $1 < \pi < 4$, tai

$$1 < \sqrt{\pi} < 2, \quad \text{o} \quad \frac{\pi}{2} < 1 < \sqrt{\pi} < 2 < \pi.$$

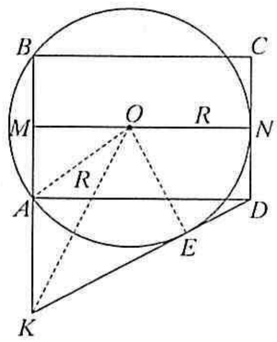
Tokį atsakymą nurodo ir Dovydas Kalnius iš Kretingos Jurgio Pabrėžos gimnazijos, paaiškinęs, kad 1 radiano kampo didumas yra 57,325 laipsnio, o $\sqrt{\pi} \approx 1{,}772$ radianų kampo didumas — 101,51 laipsnių, taigi šis kampas antrame ketvirtyje.

2. Didžiausių dėžių skaičių pažymėkime x, vidutinių — y, mažiausių — z. Tada

$$70x + 40y + 25z \leqslant 1100.$$

Už 20 Lt galima pasiųsti arba vieną 70 detalių talpinančią dėžę, arba dvi vidutines dėžes, kuriose yra 80 detalių. Kaina $K = 20x + 10y + 7z$ turi būti minimali, todėl parenkame $x = 0$. Aišku, kad 200 detalių telpa arba penkiose vidutinėse dėžėse, kurių persiuntimo kaina lygi 50 Lt, arba aštuoniose mažose dėžėse, kurių persiuntimas kainuoja 56 Lt, todėl reikia kuo daugiau vidutinių dėžių. Kadangi dėžės turi būti pilnos, o $1100 : 40 = 27{,}5$ ir pripildžius 27 vidutines dėžes liktų 20 detalių, o 26 vidutines dėžes — 60 detalių, tai reikia imti 25 vidutines dėžes, o likusiomis 100 detalių užpildyti keturias mažas dėžes.

3. $64^3 - 8^5 - 4^7 = 2^{6\cdot 3} - 2^{3\cdot 5} - 2^{2\cdot 7} = 2^{18} - 2^{15} - 2^{14} = 2^{14}(2^4 - 2 - 1) = 2^{14} \cdot 13$, todėl $(64^3 - 8^5 - 4^7)^n = 2^{14n} \cdot 13^n$ dalijasi iš 13 su visais natūraliaisiais n.



4. $S = S_{BCDK} = \frac{CD+BK}{2} \cdot AD$.
$AB = CD = 10, \quad BK = 10 + AK,$
$AD = MN = \sqrt{R^2 - 5^2} + R, \quad KE = \frac{3}{2}AK.$
Iš $\triangle OMK$: $OK^2 = (R^2 - 25) + (5 + AK)^2$.
Iš $\triangle OEK$: $OK^2 = R^2 + \frac{9}{4}AK^2$.
Abiejų lygybių dešiniosios pusės lygios, todėl
$(R^2 - 25) + (25 + 10AK + AK^2) = R^2 + \frac{9}{4}AK^2,$
$\frac{5}{4}AK^2 - 10AK = 0, \quad AK(AK - 8) = 0.$
Kadangi $AK \neq 0$, todėl $AK = 8$.
Dabar pritaikę Pitagoro teoremą, apskaičiuojame

$$AD = \sqrt{DK^2 - AK^2} = \sqrt{\left(5 + \frac{3}{2}AK\right)^2 - AK^2} = 15$$

ir randame $S = 210$.

5. Abu dėmenys neneigiami, tad jų suma lygi nuliui tik tada, kai

$$\begin{cases} 3x + 2y = 0, \\ x - 2 = 0. \end{cases}$$

Atsakymas. $x = 2$; $y = -3$.

X klasės užduoties sprendimai

1. Iš skaičių 16, 25, 36, 81 tinka tiktai 81.

2. Kadangi $P = k + (k+1) + (k+5) = 3k + 6$, tai iš nelygybės $3k + 6 < 30$ išplaukia $k < 8$. Smailiojo $\triangle ABC$ kraštinių ilgiai yra $AC = k + 4$, $AB = (k+1) + 4 = k + 5$, $BC = (k+5) + 4 = k + 9$, o ilgiausios kraštinės kvadratas

$$BC^2 < AB^2 + AC^2 \quad \text{arba} \quad (k+9)^2 < (k+5)^2 + (k+4)^2.$$

Iš gautos nelygybės $k^2 > 40$ išplaukia $k > 6$. Taigi $k = 7$, ir tuomet bukojo trikampio CDE ilgiausios kraštinės kvadratas didesnis už kitų kraštinių kvadratų sumą:

$$EC^2 > CD^2 + DE^2 \quad \text{arba} \quad (7+5)^2 > 7^2 + (7+1)^2, \quad 144 > 49 + 64.$$

Atsakymas. $P = 3 \cdot 7 + 6 = 27$.

3. Dalijant natūralųjį skaičių n iš 3, galimos liekanos 0, 1, 2. Jei $n = 3k$, tai $n^2 + 1 = 9k^2 + 1$ nesidalija iš 3, nes pirmas dėmuo dalijasi iš 3, o antrasis ne. Jei $n = 3k + 1$, tai $n^2 + 1 = 9k^2 + 6k + 2$ nesidalija iš 3, nes pirmieji du dėmenys dalijasi iš 3, o trečiasis ne. Jei $n = 3k + 2$, tai $n^2 + 1 = 9k^2 + 12k + 5$ taip pat nesidalija iš 3.

4. Vienos spintos lentynų skaičių pažymėkime l, o Petro knygų skaičių — k. Tada $16l + k = 378$. Be to, $15l < k$ ir $17(l-1) \geqslant k$. Įrašome $k = 378 - 16l$ į abi nelygybes:

$$\begin{cases} 15l < 378 - 16l, \\ 17l - 17 \geqslant 378 - 16l. \end{cases}$$

Gauname $11{,}95 \leqslant l < 12{,}19$, todėl aišku, kad $l = 12$, ir $k = 378 - 16 \cdot 12 = 186$.

Atsakymas. Petras turėjo 186 knygas; spintoje yra 12 lentynų.

5. Jei $a+1 \neq 0$, tai iš antros lygties atėmę pirmąją gauname kvadratinę lygtį

$$(a+1)x^2+(2-2a)x+1=0.$$

Diskriminantas $D=4(1-a)^2-4(a+1)$ lygus nuliui, kai $a_1=0$ ir $a_2=3$.
Jei $a=-1$, tiesinė sistema

$$\begin{cases} -x-y=3, \\ 3x-y=2 \end{cases}$$

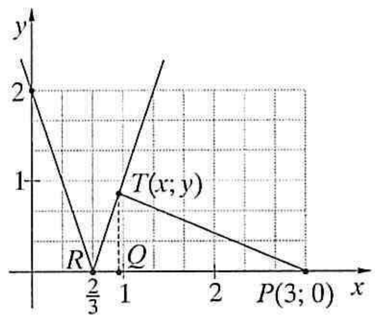
turi vienintelį sprendinį $x=-\frac{1}{4}$; $y=-\frac{11}{4}$.

Atsakymas. $a_1=0$; $a_2=3$; $a_3=-1$.

XI klasės užduoties sprendimai

1. Aišku, kad $\overrightarrow{PT} \perp \overrightarrow{RT}$, todėl $\overrightarrow{PT}\cdot\overrightarrow{RT}=0$. Kadangi $\overrightarrow{PT}=(x-3;y)$, o $\overrightarrow{RT}=(x-\frac{2}{3};y)$, tai $(x-3)\cdot(x-\frac{2}{3})+y\cdot y=0$. Į gautąją lygtį įrašome tiesės, einančios per taškus R ir T, lygtį $y=3x-2$:

$$x^2-3x-\frac{2}{3}x+2+(3x-2)^2=0, \qquad 30x^2-47x+18=0; \quad x_1=\frac{9}{10},\ x_2=\frac{2}{3}\ \text{(netinka)}.$$



Kitaip šis rezultatas gaunamas iš trikampių TQR ir PQT panašumo:

$$\frac{PQ}{TQ}=\frac{TQ}{RQ} \quad \text{arba} \quad \frac{3-x}{y}=\frac{y}{x-\frac{2}{3}}.$$

Vėl įrašę $y=3x-2$ ir išsprendę tą pačią kvadratinę lygtį $30x^2-47x+18=0$, gauname $x=0{,}9$. Tada $y=3\cdot\frac{9}{10}-2=\frac{7}{10}$.

Atsakymas. $T(0,9;0,7)$; $TP=\sqrt{4{,}9}$.

2. Taikome kosinusų teoremą ir išreiškiame $\cos\varphi$:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\varphi, \qquad \cos\varphi=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ac}.$$

Dabar pertvarkome duotąją lygybę:

$$\big((a+b)+2c\big)\big((a+b)+c\big)=3(a+c)(b+c),$$
$$(a+b)^2+3c(a+b)+2c^2=3\big(ab+ac+bc+c^2\big).$$

Įrašę į $\cos\varphi$ išraišką $a^2+b^2-c^2=ab$, gauname $\cos\varphi=\frac{1}{2}$, o $\varphi=60°$.

Atsakymas. $\varphi=60°$.

3. Iš penkių pasiųstųjų sumų tiktai $(A+C)+(B+D)=(A+D)+(B+C)$. Apskaičiuojame visas sumas:

$$\begin{array}{l|l|l|l} 13+15=28, & 15+16=31, & 16+20=36, & 20+22=42. \\ 13+16=29, & 15+20=35, & 16+22=38, & \\ 13+20=33, & 15+22=37, & & \\ 13+22=35, & & & \end{array}$$

Pastebime, kad sutampa tiktai $13+22=15+20$. Šiose sumose nėra dėmens 16, todėl $A+B=16$ ir

$$\begin{cases} A+C=13, \\ B+C=20 \text{ (arba 15)}, \end{cases} \qquad \begin{cases} B+D=22, \\ A+D=15 \text{ (arba 20)}. \end{cases}$$

Iš abiejų sistemų gauname $B-A=7$ (arba 2). Jei $B=A+7$, tai $2A+7=16$ ir $A\notin N$. Taigi $B-A=2$. Tuomet $B=9$, $A=7$, $C=6$, $D=13$.

Atsakymas. 6, 7, 9, 13.

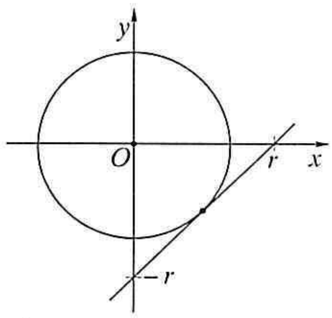
4. Iš pirmos lygties aišku, kad $r\geqslant 0$.
Kai $r=0$, tai $x=0$ ir $y=0$ yra vienintelis sistemos sprendinys.
Kai $r>0$, sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2=r, \\ y=r-x \end{cases}$$

turi vienintelį sprendinį, kai kvadratinės lygties

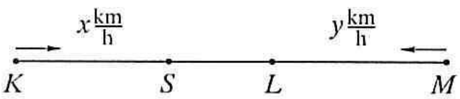
$$x^2+(r-x)^2=r,$$
$$2x^2-2rx+(r^2-r)=0$$

diskriminantas $D=4r^2-8(r^2-r)=-4r^2+8r$ lygus nuliui. Lygties $8r-4r^2=0$ teigiamas sprendinys yra $r=2$. Iš tikrųjų apskritimas $x^2+y^2=r$ ir tiesė $y=r-x$ turi vienintelį bendrą tašką, kai ši tiesė liečia apskritimą.



Atsakymas. $r_1=0$ ir $r_2=2$.

5. Susitikimo vietą pažymėkime L, o keleivių greičius — x ir y.



Tuomet $KL+LM=7$, $KS+MS=7$.
Sąlygoje nurodyta, kad laikas $\frac{KL}{x}<1$ ir $\frac{ML}{y}<1$, todėl atstumai $x>KL$ ir $y>ML$, o jų suma

$$x+y>7. \tag{1}$$

Pažymėję galimą susitikimo vietą S, o sugaištą laiką t, apskaičiuojame atstumų $t \cdot 2x = KS$ ir $t \cdot (y+2) = MS$ sumą $t \cdot (2x+y+2) = 7$ ir išreiškiame

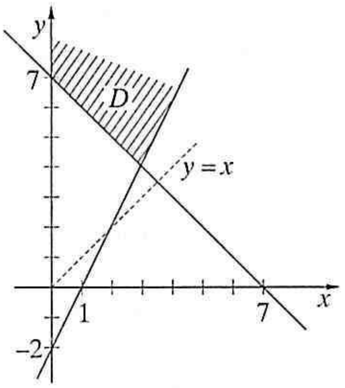
$$(2x+y+2) = \frac{7}{t}.$$

Kadangi $MS > \frac{7}{2}$, tai $t \cdot (y+2) > \frac{7}{2}$ ir $2(y+2) > \frac{7}{t}$. Į šią nelygybę įrašę trupmenos išraišką, gauname $2(y+2) > 2x+y+2$ arba

$$y > 2x - 2. \tag{2}$$

Nurodysime keletą tolesnio sprendimo būdų.

1 *būdas*. Abi (1) ir (2) nelygybės nusako plokštumos sritį D, esančią virš tiesės $y = x$. Todėl $y > x$.



2 *būdas*. Tarkime, kad $y \leqslant x$. Prie šios nelygybės abiejų pusių pridėję x ir pritaikę (1) nelygybę, gautume $x + x \geqslant x + y > 7$, arba $2x > 7$. Pridėję 2 ir pritaikę (2) nelygybę, gautume $2 + x \geqslant 2 + y > 2x$, arba $2 + x > 2x$, $x < 2$. Tačiau gautosios prieštaraujančios viena kitai nelygybės $x > \frac{7}{2}$ ir $x < 2$ nurodo, jog šis atvejis negalimas. Taigi $y > x$.

3 *būdas*. Valerija Vojevodina iš Visagino „Gerosios vilties" vidurinės mokyklos sudėjo (1) ir (2) nelygybes:

$$+\begin{cases} y > 7 - x \\ y > 2x - 2 \,|\cdot 2 \end{cases}$$
$$\overline{3y > 3x + 3}$$

Kadangi $y > x + 1$, tai $y > x$.

4 *būdas*. KTU gimnazistas Marijus Kilmanas žymėjo

$$x + y = 7 + m, \quad m > 0. \tag{3}$$

Įrašęs $y = 7 + m - x$ į (2) nelygybę, gavo $2x < (7 + m - x) + 2$, arba $3x < 9 + m$, o tada

$$3 + \frac{m}{3} > x. \tag{4}$$

Į tą pačią (2) nelygybę įrašęs $x = 7 + m - y$, gavo $y > 2(7 + m - y) - 2$, arba $3y > 12 + 2m$. Tuomet

$$y > 4 + \frac{2}{3}m, \quad \text{arba} \quad y > \left(3 + \frac{m}{3}\right) + \left(1 + \frac{m}{3}\right).$$

Tada iš (4) nelygybės gauname

$$y > x + 1 + \frac{m}{3},$$

iš čia išplaukia $y > x$.

Atsakymas. $y > x$.

XII klasės užduoties sprendimai

1. Lygybėje

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}=\frac{19}{20}$$

pirmoji iš keturių trupmenų didžiausia, o paskutinioji — mažiausia, todėl

$$\frac{4}{n+3}<\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}<\frac{4}{n}.$$

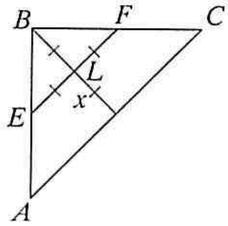
Abi nelygybes

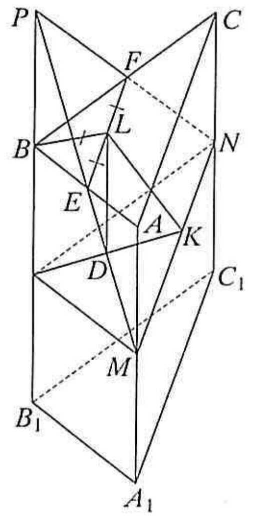
$$\frac{4}{n+3}<\frac{19}{20}<\frac{4}{n}$$

tenkina n reikšmės iš intervalo $(\frac{23}{19};\ \frac{80}{19})$, kuriame yra natūralieji skaičiai 2, 3 ir 4. Patikrinus paaiškėja, kad $n=3$.

Atsakymas. Ieškomieji skaičiai: 3; 4; 5; 6.

2. $S = S_{MEFN} = \frac{MN+EF}{2}\cdot KL.$
$MN = AC = \sqrt{2},$
$EF = \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\cdot BL = 2x,$
$DK = x = \frac{\sqrt{2}}{4}.$
Iš ΔKLD: $LK = \sqrt{DK^2+DL^2} =$
$= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{8}}.$
$S = \frac{3\sqrt{2}}{4}\cdot\sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$





3. Aišku, kad $x \geqslant 0$. Žymime $u=\sqrt{x}-1$ ir įrašome į lygtį $\sqrt{x}=u+1$. Kadangi $\log_3 A = \log_9 A^2$, tai suvienodinę pagrindus gauname lygtį

$$\big(u+1+|u|\big)^2 = 4(u+1)-3+4|u|.$$

Tarkime, kad $u \leqslant 0$. Tada lygtis teisinga su visais $u \leqslant 0$, nes

$$(u+1-u)^2 = 4u+1-4u, \quad 1=1.$$

Kai $u>0$, lygties

$$(u+1+u)^2 = 4u+1+4u, \quad \text{arba} \quad 4u^2+4u+1 = 4u+1+4u$$

sprendinys yra $u=1$.
Taigi duotosios lygties sprendiniai yra visi $x \geqslant 0$, su kuriais $\sqrt{x}-1 \leqslant 0$ ir $\sqrt{x}-1=1$.

Atsakymas. $0 \leqslant x \leqslant 1$ ir $x=4$.

4. Iš sąlygos $\cos(9ax - 7x) - \cos(17ax + 13x) = 0$. Išskaidę gauname

$$2\sin(13ax + 3x) \cdot \sin(4ax + 10x) = 0.$$

Iš čia

$$\sin(13ax + 3x) = 0, \quad \text{kai } x_n = \frac{\pi n}{13a + 3},$$

o

$$\sin(4ax + 10x) = 0, \quad \text{kai } \tilde{x}_k = \frac{\pi k}{4a + 10}; \quad k, n \in N_0.$$

Gali būti: $x_1 = \tilde{x}_1$, ir tada iš lygybės $13a + 3 = 4a + 10$ gautume $a = \frac{7}{9}$;
$x_1 = \tilde{x}_2$, ir tada iš $\frac{1}{13a+3} = \frac{2}{4a+10}$ gautume $a = \frac{2}{11}$;
$x_1 = \tilde{x}_3$, ir tada iš $\frac{1}{13a+3} = \frac{3}{4a+10}$ gautume $a = \frac{1}{35}$, bet $x_1 \neq \tilde{x}_4$, nes būtų $a < 0$.
$\tilde{x}_1 = x_2$, ir tada $13a + 3 = 8a + 20$, arba $a = \frac{17}{5}$;
$\tilde{x}_1 = x_3$, ir tada $13a + 3 = 12a + 30$, arba $a = 27$, bet $\tilde{x}_1 \neq x_4$, nes būtų $a < 0$.

Atsakymas. Ieškomos parametro a reikšmės: $\frac{1}{35}$; $\frac{2}{11}$; $\frac{7}{9}$; $\frac{17}{5}$; 27.

5. VDU Kauno „Rasos" gimnazijos gimnazistas Ignas Krupavičius sprendė šitaip.
Jei liktų du piratai, vyresnysis pasiimtų visą auksą, nes likęs negalėtų sudaryti daugumos ir pašalinti vyresniojo iš dalybų. Todėl, jei būtų trys piratai, vyriausiasis turėtų siūlyti dalį jauniausiajam, su kuriuo sudarytų daugumą, pritariančią šiam variantui. O jeigu būtų keturi piratai, vyriausiasis turėtų siūlyti antrajam pagal jaunumą piratui dalį aukso, kad jie dviese sudarytų pusę, pritariančią dalybų variantui, o jauniausias ir trečias pagal jaunumą negautų nieko. Tai žinodamas vyriausias iš penkių piratų turėtų siūlyti po aukso luitą jauniausiajam ir trečiam pagal jaunumą, kad jie palaikytų siūlomą dalybų variantą.

Atsakymas. Vyriausiasis gautų 8 aukso luitus, o jauniausiasis ir trečiasis pagal jaunumą — po vieną luitą.

PROF. J. MATULIONIO XV KONKURSO NUGALĖTOJAI

VIII klasė

III vieta
Artiom Fiodorov (18,5 t.), Visagino „Gerosios vilties" vid. m-kla
Karolis Švitra (15 t.), Kretingos Jurgio Pabrėžos g-ja

IX klasė

II vieta
Aleksas Mazeliauskas (14 t.), Mažeikių „Gabijos" g-ja

X klasė

I vieta
Denis Sokolov (20 t.), Vilniaus tiksliųjų, gamtos ir technikos mokslų licėjus
Vytautas Jakštas (19,5 t.), Šiaulių Didždvario g-ja
Karolis Uosis (19 t.), Kretingos Jurgio Pabrėžos g-ja

II vieta
Gytis Jankevičius (18,5 t.), KTU g-ja
Jonas Šukys (18,5 t.), KTU g-ja
Daumilas Ardickas (18 t.), Vilniaus tiksliųjų, gamtos ir technikos mokslų licėjus

III vieta
Andrej Jefimec (17,5 t.), Visagino „Gerosios vilties" vid. m-kla
Jevgenij Rukin (17 t.), Visagino „Gerosios vilties" vid. m-kla
Audrūnas Gruslys (17 t.), Vilniaus tiksliųjų, gamtos ir technikos mokslų licėjus
Martynas Sabaliauskas (17 t.), Šiaulių Stasio Šalkauskio g-ja

XI klasė

I vieta
Vytautas Butkus (20 t.), Salantų vid. m-kla
Agnė Bingelytė (20 t.), Vilniaus tiksliųjų, gamtos ir technikos mokslų licėjus
Marijus Kilmanas (20 t.), KTU g-ja
Stas Surin (20 t.), Visagino „Atgimimo" g-ja
Valerija Vojevodina (20 t.), Visagino „Gerosios vilties" vid. m-kla

II vieta
Jonas Lisauskas (19 t.), Vilniaus tiksliųjų, gamtos ir technikos mokslų licėjus
Inga Šermokaitė (19 t.), Vilniaus tiksliųjų, gamtos ir technikos mokslų licėjus

III vieta
Karolis Blaževičius (17 t.), Vilniaus tiksliųjų, gamtos ir technikos mokslų licėjus

XII klasė

I vieta
Ignas Budvytis (20 t.), Vilniaus tiksliųjų, gamtos ir technikos mokslų licėjus

II vieta
Vygantas Butkus (18 t.), Šiaulių Didždvario g-ja
Albertas Zinevičius (18 t.), KTU g-ja

III vieta
Donatas Majus (17 t.), Plungės „Saulės" g-ja