$\alpha + \omega$, 2003, Nr. 3, 58–62

Ekstremumai be išvestinių

Juozas Šinkūnas
sinkunas@vpu.lt

Ekstremumų uždavinius įprasta spręsti remiantis išvestinėmis. Šiame straipsnelyje parodoma, kaip ekstremumų uždavinius galima spręsti remiantis aritmetinio ir geometrinio vidurkių savybėmis ir nesinaudojant išvestinėmis. Šiuo būdu ekstremumų uždavinius gali spręsti ir devintų, ir dešimtų klasių mokiniai.

Apibrėžimas. *Neneigiamų n skaičių $a_1, a_2, \ldots, a_n$ aritmetiniu vidurkiu vadinamas skaičius $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$, o tų skaičių geometriniu vidurkiu — skaičius $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$.*

Teorema. *Neneigiamų n skaičių $a_1, a_2, \ldots, a_n$ aritmetinis vidurkis ne mažesnis už tų skaičių geometrinį vidurkį, t. y.*

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Lygybė galima tik tada, kai $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Įrodymas. Šią teoremą įrodysime tik atskirais atvejais, kai $n = 2, 3$ ir 4. Šių atvejų pakanka spręsti praktinio pobūdžio ekstremumų uždavinius.

1 *atvejis.* Kai $n = 2$, reikia įrodyti nelygybę $\frac{a_1+a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_1a_2}$.

Akivaizdu, kad $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geqslant 0$, t. y. $a_1 + a_2 - 2\sqrt{a_1a_2} \geqslant 0$ arba $\frac{a_1+a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_1a_2}$.

Lygybė galima tik tada, kai $a_1 = a_2$.

2 *atvejis.* Kai $n = 4$, reikia įrodyti nelygybę

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} \geqslant \sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}.$$

Iš tikrųjų, $\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} = \frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}}{2} \geqslant \sqrt{\frac{a_1+a_2}{2} \cdot \frac{a_3+a_4}{2}} \geqslant \sqrt{\sqrt{a_1a_2} \cdot \sqrt{a_3a_4}} = \sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}$.

Lygybė galima tik tada, kai $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$.

3 *atvejis.* Kai $n = 3$, įrodysime, kad

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{3} \geqslant \sqrt[3]{a_1a_2a_3}.$$

Akivaizdu, kad

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{3} = \frac{\frac{a_1+a_2+a_3}{3} + a_1 + a_2 + a_3}{4} \geqslant \sqrt[4]{\frac{a_1+a_2+a_3}{3} \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3}.$$

Gautąją nelygybę pakėlę ketvirtuoju laipsniu, gauname $(\frac{a_1+a_2+a_3}{3})^4 \geqslant \frac{a_1+a_2+a_3}{3} \cdot a_1a_2a_3$, t. y. $(\frac{a_1+a_2+a_3}{3})^3 \geqslant a_1a_2a_3$, arba $\frac{a_1+a_2+a_3}{3} \geqslant \sqrt[3]{a_1a_2a_3}$.

Lygybė galima tik tada, kai $a_1 = a_2 = a_3$.

Pastaba. Kartais nelygybės tarp aritmetinio ir geometrinio vidurkių užrašomos taip:
1) $(\frac{a_1+a_2}{2})^2 \geqslant a_1a_2$; 2) $(\frac{a_1+a_2+a_3}{3})^3 \geqslant a_1a_2a_3$; 3) $(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4})^4 \geqslant a_1a_2a_3a_4$.

Išvados. 1) *Jeigu n teigiamų dėmenų ($n = 2, 3, 4, \ldots$) suma yra pastovi, tai jų sandauga yra didžiausia, kai dėmenys yra lygūs.*

2) *Jeigu n teigiamų dauginamųjų ($n = 2, 3, 4, \ldots$) sandauga yra pastovi, tai jų suma yra mažiausia, kai dauginamieji yra lygūs.*

Įrodymas. 1) Teiginį įrodysime trims dėmenims. Sakykime, kad $a_1 + a_2 + a_3 = P$. Tada $a_1a_2a_3 \leqslant (\frac{a_1+a_2+a_3}{3})^3 \leqslant \frac{P^3}{27}$.

Taigi sandauga $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3$ ne didesnė už $\frac{P^3}{27}$. Ši sandauga lygi $\frac{P^3}{27}$ (įgyja didžiausią reikšmę), kai $a_1 = a_2 = a_3$.

2) Sakykime, $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = S$. Tada $(\frac{a_1+a_2+a_3}{3})^3 \geqslant a_1a_2a_3 = S$, t. y. $a_1 + a_2 + a_3 \geqslant 3\sqrt[3]{S}$.

Taigi suma $a_1 + a_2 + a_3$ ne mažesnė už $3\sqrt[3]{S}$.

Ši suma lygi $3\sqrt[3]{S}$ (įgyja mažiausią reikšmę), kai $a_1 = a_2 = a_3$.

Pavyzdžiai

1. Raskime didžiausią funkcijos $f(x)$ reikšmę nurodytame intervale:

a) $f(x) = x(2 - 3x)$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{2}{3}$; b) $f(x) = 4x^3 - x^4$, $0 \leqslant x \leqslant 4$.

Sprendimas. a) Akivaizdu, kad $f(0) = f(\frac{2}{3}) = 0$. Kadangi $f(x) = x(2-3x) = \frac{1}{3}(3x)(2-3x)$ ir, kai $0 < x < \frac{2}{3}$, abu dauginamieji yra teigiami, tai

$$f(x) \leqslant \frac{1}{3}\Big(\frac{3x + 2 - 3x}{2}\Big)^2 = \frac{1}{3}.$$

Lygybė galima tik tada, kai $3x = 2 - 3x$, t. y. kai $x = \frac{1}{3}$.

Atsakymas. $f_{\text{didž.}}(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$.

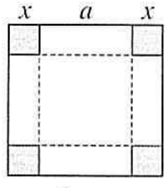
b) $f(0) = f(4) = 0$. Kadangi $f(x) = x^3(4 - x) = 27 \cdot \frac{x}{3} \cdot \frac{x}{3} \cdot \frac{x}{3} \cdot (4 - x)$ ir, kai $0 < x < 4$, visi dauginamieji yra teigiami, tai

$$f(x) \leqslant 27\Big(\frac{x/3 + x/3 + x/3 + 4 - x}{4}\Big)^4 = 27.$$

Lygybė galima tik tada, kai $\frac{x}{3} = 4 - x$, t. y. kai $x = 3$.

Atsakymas. $f_{\text{didž.}}(3) = 27$.

2. Kvadratinio skardos lapo, kurio kraštinė lygi a, kampuose išpjauti lygūs kvadratėliai. Sulenkus lapo kraštus, gauta stačiakampio gretasienio formos atvira dėžutė. Raskime, kokio ilgio turi būti išpjauto kvadratėlio kraštinė, kad dėžutės tūris būtų didžiausias.



Sprendimas. Sakykime, kad išpjautų kvadratėlių kraštinė lygi x.

Tada dėžutės pagrindo kraštinė lygi $a - 2x$, o dėžutės tūris — $V(x) = (a - 2x)^2 \cdot x$; čia $0 < x < \frac{a}{2}$.

Akivaizdu, kad

$$V(x) = (a-2x)^2 \cdot x = (a-2x)(a-2x)(4x) \cdot \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{4}\Big(\frac{a - 2x + a - 2x + 4x}{3}\Big)^3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{8a^3}{27} = \frac{2a^3}{27}.$$

Lygybė galima tik tada, kai $a - 2x = 4x$, t. y. kai $x = \frac{a}{6}$.

Atsakymas. $V_{\max}(\frac{a}{6}) = \frac{2a^3}{27}$.

3. Tarp taisyklingųjų keturkampių gretasienių, kurių tūris lygus V, raskime tokį, kurio paviršiaus plotas yra mažiausias.

Sprendimas. Sakykime, kad gretasienio pagrindo kraštinė yra x, o gretasienio aukštinė — h. Tada jo tūris $V = x^2 \cdot h$, o paviršiaus plotas $T = 2x^2 + 4xh = 2x^2 + 4x \cdot \frac{V}{x^2} = 2x^2 + \frac{4V}{x} = 2x^2 +$ $+ \frac{2V}{x} + \frac{2V}{x} \geqslant 3\sqrt[3]{2x^2 \cdot \frac{2V}{x} \cdot \frac{2V}{x}} = 6\sqrt[3]{V^2}$.

Lygybė galima tik tada, kai $2x^2 = \frac{2V}{x}$, t. y. kai $x = \sqrt[3]{V}$. Gretasienio aukštinė $h = \frac{V}{\sqrt[3]{V^2}} =$ $= \sqrt[3]{V}$.

Atsakymas. Kubas.

4. (2002 m. matematikos valstybinio brandos egzamino užduotis)
Į taisyklingą keturkampę piramidę, kurios pagrindo kraštinės ilgis 6 cm, o aukštinės — 12 cm, įbrėžiama taisyklingoji prizmė, kurios viršutinio pagrindo viršūnės yra piramidės briaunose. Kokio didžiausio tūrio prizmę galime įbrėžti? (6 *taškai*)

Sprendimas. Sakykime, kad įbrėžtos prizmės pagrindo kraštinė lygi x cm. Tada prizmės tūris $V(x) = x^2(12 - 2x)$ (įrodykite!); čia $0 < x < 6$. Turime:

$$V(x) = 2 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot (6 - x) \cdot 4 \leqslant 8\left(\frac{\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + 6 - x}{3}\right)^3 = 64.$$

Lygybė galima, kai $\frac{x}{2} = 6 - x$, t. y. kai $x = 4$ cm.

Atsakymas. $V_{\max}(4) = 64\ \text{cm}^3$.

5. (2003 m. matematikos valstybinio brandos egzamino pakartotinės sesijos užduotis)
Iš $10\ \text{m}^2$ brezento norime pasiūti vaikišką keturšlaitę taisyklingos piramidės pavidalo palapinę su dugnu (į medžiagos, reikalingos siūlėms ir atraižoms, sąnaudas nekreipkite dėmesio).

1) Pažymėję piramidės pagrindo kraštinė ilgį x, įrodykite, kad piramidės tūrį galima apskaičiuoti pagal formulę $V(x) = \frac{x\sqrt{10(10-2x^2)}}{6}$. (3 *taškai*)
2) Koks turi būti piramidės pagrindo kraštinės ilgis x, kad pasiūtume didžiausio tūrio palapinę? (3 *taškai*)

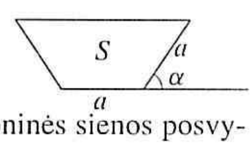
Sprendimas. Formulės čia neįrodinėsime, o ieškosime tik funkcijos $V(x)$ didžiausios reikšmės. Turime:

$$V(x) = \frac{x\sqrt{10(10-2x^2)}}{6} = \frac{\sqrt{10}}{6}\sqrt{x^2(10-2x^2)} = \frac{\sqrt{10}}{6}\sqrt{\frac{1}{2}(2x^2)(10-2x^2)} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\sqrt{5}}{6}\sqrt{\left(\frac{2x^2 + 10 - 2x^2}{2}\right)^2} = \frac{5\sqrt{5}}{6}.$$

Lygybė galima tik tada, kai $2x^2 = 10 - 2x^2$, t. y. kai $x = \sqrt{\frac{5}{2}}$.

Atsakymas. Palapinė turės maksimalų tūrį $\frac{5\sqrt{5}}{6}$, kai palapinės kraštinės ilgis $\sqrt{\frac{5}{2}}$.

6. (1999 m. matematikos valstybinio brandos egzamino pavyzdinė užduotis)
Melioracijos kanalo skersinis pjūvis yra lygiašonės trapecijos formos. Jos trumpesnysis pagrindas ir šoninės kraštinės yra to paties ilgio a.



1) Įrodykite, kad kanalo skerspjūvio ploto S priklausomybė nuo kanalo šoninės sienos posvyrio kampo α yra tokia: $S = a^2(1 + \cos\alpha) \cdot \sin\alpha$. (4 *taškai*)
2) Koks turi būti kanalo sienos posvyrio kampas $\alpha \in [0; \pi/2]$, kad kanalo skerspjūvio plotas būtų didžiausias? (6 *taškai*)

Sprendimas. Ieškosime tik $S(\alpha) = a^2(1+\cos\alpha)\sin\alpha$ didžiausios reikšmės. Turime:

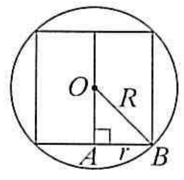
$$S(\alpha) = a^2\cdot(1+\cos\alpha)\cdot\sin\alpha = a^2\cdot 2\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2} = 4a^2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^3\frac{\alpha}{2} =$$

$$= 4a^2\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^6\frac{\alpha}{2}} = 4a^2\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{3}\cdot\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{3}\cdot\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{3}\cdot 27} \leqslant$$

$$\leqslant 12\sqrt{3}a^2\sqrt{\left(\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{3}+\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{3}+\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{3}}{4}\right)^4} = \frac{12}{16}\sqrt{3}a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2.$$

Lygybė galima, kai $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{3}$, t. y. kai $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$. Kadangi $0 < \alpha < \pi/2$, tai $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, o $\frac{\alpha}{2} = 30°$, t. y. $\alpha = 60°$.

7. Kokia turi būti į spindulio R sferą įbrėžto ritinio aukštinė, kad jo tūris būtų didžiausias?



Sprendimas. Brėžinyje pavaizduota į sferą įbrėžto ritinio ašinis pjūvis. Sakykime, ritinio aukštinė yra x, o jo pagrindo spindulys lygus r. Tada $V = \pi r^2 h$. Iš stačiojo trikampio OAB gauname, kad $r^2 = R^2 - (\frac{h}{2})^2$. Taigi

$$V = \pi(R^2 - \frac{h^2}{4})\cdot h = \frac{\pi}{4}(4R^2-h^2)\cdot h = \frac{\pi}{4}\sqrt{(4R^2-h^2)^2\cdot h^2} =$$

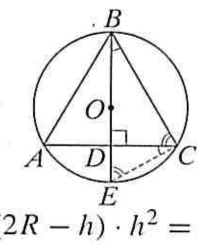
$$= \frac{\pi}{4}\sqrt{(4R^2-h^2)\cdot(4R^2-h^2)\cdot(2h^2)\cdot\frac{1}{2}} \leqslant \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\sqrt{\left(\frac{4R^2-h^2+4R^2-h^2+2h^2}{3}\right)^3} =$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\sqrt{\frac{(8R^2)^3}{27}} = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}.$$

Lygybė galima, kai $4R^2 - h^2 = 2h^2$, t. y. kai $h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$.

Atsakymas. $V_{\max}(\frac{2R}{\sqrt{3}}) = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$.

8. Kokia turi būti į spindulio R sferą įbrėžto kūgio aukštinė, kad kūgio tūris būtų didžiausias?



Sprendimas. Brėžinyje pavaizduotas į sferą įbrėžto kūgio ašinis pjūvis. Sakykime, $BD = h$, o $DC = r$. Tada $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Iš trikampių BDC ir CDE panašumo (pagal 3 lygius kampus) gauname

$\frac{DC}{BD} = \frac{DE}{DC}$. Iš čia $DC^2 = BD\cdot DE$, t. y. $r^2 = (2R-h)\cdot h$. Taigi $V(h) = \frac{1}{3}\pi(2R-h)\cdot h^2 = \frac{1}{3}\pi(2R-h)\cdot\frac{h}{2}\cdot\frac{h}{2}\cdot 4 = \frac{4}{3}\pi(2R-h)\cdot\frac{h}{2}\cdot\frac{h}{2} \leqslant \frac{4}{3}\pi(\frac{2R-h+\frac{h}{2}+\frac{h}{2}}{3})^3 = \frac{32\pi R^3}{81}$.
Lygybė galima tik tada, kai $2R - h = \frac{h}{2}$, t. y. kai $h = \frac{4R}{3}$.

Atsakymas. $V_{\max}(\frac{4R}{3}) = \frac{32\pi R^3}{81}$.

9. Reikia pagaminti stačiakampio gretasienio formos akvariumą. Kokie turi būti akvariumo matmenys, kad jo gamybai reikėtų mažiausiai medžiagų?

Sprendimas. Sakykime, akvariumo ilgis yra x, plotis — y, o aukštis — z. Tada $V = xyz$, o $T = xy + 2xz + 2yz$. Tūrio formulę pertvarkysime taip: $V^2 = x^2y^2z^2 = \frac{1}{4}(xy)(2xz)(2yz)$, t. y.

$(xy)(2xz)(2yz) = 4V^2$. Kadangi teigiamų skaičių (xy), $(2xy)$ ir $(2yz)$ sandauga yra pastovi, tai jų suma T įgyja mažiausią reikšmę, kai $xy = 2xz = 2yz$. Iš čia išplaukia, kad $x = y = 2z = \sqrt[3]{2V}$. Vadinasi, kai akvariumo pagrindas kvadratas, kurio kraštinė lygi $\sqrt[3]{2V}$, o aukštinė du kartus trumpesnė už pagrindo kraštinę, tai jo paviršiaus plotas yra mažiausias: $T_{\min} = 3\sqrt[3]{4V^2}$.

Uždaviniai

1. Raskite funkcijos $f(x) = x^2(18 - x^2)$ didžiausią reikšmę.
[$f_{\max}(-3) = f_{\max}(3) = 81$]

2. Raskite funkcijos $f(x) = x + \frac{25}{x-4}$, $x > 4$, mažiausią reikšmę.
[$f_{\min}(9) = 14$]

3. Į kūgį, kurio pagrindo spindulys yra R, o aukštinė — H, įbrėžkite didžiausio tūrio ritinį.
[$V_{\max} = \frac{4\pi HR^2}{27}$, kai ritinio pagrindo spindulys $r = \frac{2}{3}R$, o ritinio aukštinė $h = \frac{1}{3}H$]

4. Ritinio formos konservų dėžutės pilnas paviršius lygus T. Kokie turi būti dėžutės matmenys (pagrindo skersmuo ir aukštinė), kad jos tūris būtų didžiausias?
[$2R = h = \sqrt{\frac{2T}{3\pi}}$. Dėžutės pagrindo skersmuo lygus dėžutės aukštinei]

5. Tarp ritinių, kurių ašinio pjūvio perimetras yra $2p$, raskite ritinį, kurio šoninio paviršiaus plotas didžiausias, ir apskaičiuokite to ritinio tūrį.
[$V = \frac{\pi p^3}{3r}$]

6. Reikia pagaminti $108\,\text{cm}^3$ stačiakampio gretasienio formos dėžutę be dangčio; be to, jos pagrindas turi būti kvadrato formos. Kokie turi būti dėžutės matmenys, kad jai pagaminti būtų sunaudota mažiausiai medžiagos?
[$6 \times 6 \times 3$]

7. Raskite mažiausią funkcijos $f(x) = x^{1500} + x^{500} + x^5 + \frac{2005}{x}$, $0 < x < +\infty$, reikšmę.
[$f_{\min}(1) = 2008$]

8. Stačiakampio gretasienio formos dėžutės dugnas yra kvadratas, o dėžutės tūris lygus $270\,\text{cm}^3$. Dėžutės dugnas, dangtis ir šoninės sienos padarytos iš skirtingų medžiagų. $1\,\text{cm}^2$ dugno kainuoja 8 ct, $1\,\text{cm}^2$ dangčio — 17 ct ir $1\,\text{cm}^2$ šoninio paviršiaus — 10 ct. Kokie turi būti dėžutės matmenys, kad jai pagaminti reikėtų mažiausiai lėšų?
[$6\,\text{cm} \times 6\,\text{cm} \times 7{,}5\,\text{cm}$]

9. Reikia aptverti stačiakampio formos 0,9 ha ploto žemės sklypą: dvi šio sklypo priešingas puses medine tvora, o kitas dvi priešingas puses — vieline tvora. 1 m medinės tvoros kainuoja 5 Lt, o 1 m vielinės tvoros — 2 Lt. Ar užteks 1200 Lt aptverti žemės sklypą?

10. Iš taisyklingojo trikampio formos skardos lapo, kurio kraštinė lygi 60 cm, reikia pagaminti trikampės prizmės formos dėžutę, trikampio kampuose iškerpant vienodus keturkampius ir sulenkiant trikampio kraštines (žr. paveikslėlį). Su kuria x reikšme dėžutės tūris yra didžiausias?
[10 cm]