$\alpha + \omega$, 2003, Nr. 3, 55–57

Kaip formuoju geometrijos uždavinių sprendimo įgūdžius?

Rūta Švelnikienė
Širvintų „Atžalyno“ vidurinė mokykla

Mokydami vaikus matematikos, mokome juos formuluoti problemas, aiškintis jų esmę, rasti sprendimo būdą, jį realizuoti, numatyti galimus rezultatus, mokome būti kūrybingais.

Geometrijos uždavinių sprendimas — kūrybinė veikla. Iš pradžių aptariame ir pakartojame sąvokas, sąryšius, savybes, kurių prireiks atliekant užduotis. Taip vaikai nukreipiami nuosekliam darbui pamokoje. Siekdama, kad vaikai susiformuotų geometrijos uždavinių sprendimo įgūdžius, skatinu juos daug dėmesio skirti uždavinio sąlygos analizei.

Išanalizavę sąlygą, vaikai pirmiausia patys siūlo savo idėjas, sudaro uždavinio sprendimo planą, po to savarankiškai užrašo sprendimą. Klasėje visada yra vaikų, kuriems matematika labai sudėtingas dalykas, todėl uždavinio sprendimą užrašome ir lentoje. Visada reikalauju, kad kiekvieną sąryšį, teiginį, pastebėjimą vaikai pagrįstų. Taip jie mokosi būti atsakingi, nuoseklūs, tuo pačiu pakartoja ir dar giliau įsisąmonina žinomas sąvokas, sąryšius, taisykles, apibrėžimus, savybes.

Kaip iliustraciją principų, kurių laikausi mokydama vaikus spręsti geometrijos uždavinius, pateikiu matematikos pamokos „Įbrėžtinis kampas ir jo taikymai“ išplėstinį planą. Tai galėtų būti antroji pamoka nagrinėjant IX klasėje temą „Įbrėžtiniai kampai“ arba kartojimo X ar net XII klasės kurso pamoka.

Prieš pradedant spręsti uždavinius, mokiniams pateikiu tokius teorinius klausimus:

1) Kokias dvi sąlygas turi atitikti kampas, kad jį galėtume pavadinti įbrėžtiniu?

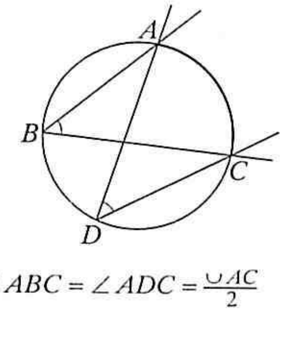
2) Kas sieja įbrėžtinio kampo didumą su lanko, į kurį jis remiasi, didumu?

3) Kas sieja įbrėžtinį kampą su centriniu kampu, jei jie remiasi į tą patį lanką?

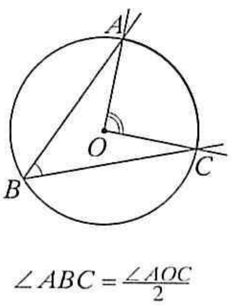
4) Kokią savybę turi įbrėžtiniai kampai, besiremiantys į tą patį lanką?

5) Kuo ypatingas įbrėžtinis kampas, besiremiantis į skersmenį?

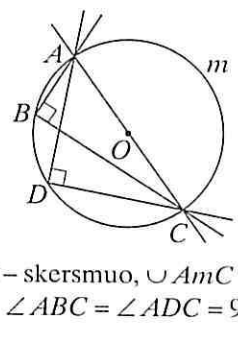
Atsakydami į šiuos klausimus mokiniai lentoje ar sąsiuviniuose nusibraižo keletą įbrėžtinių kampų, besiremiančių į tą patį lanką, ir įbrėžtinį bei jį atitinkantį centrinius kampus, užrašo tų kampų didumus siejančias lygybes. Tikslinga taip pat pavaizduoti keletą įbrėžtinių kampų, besiremiančių į skersmenį.



$\angle ABC = \angle ADC = \frac{\cup AC}{2}$



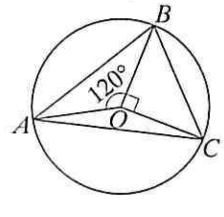
$\angle ABC = \frac{\angle AOC}{2}$



AC – skersmuo, $\cup AmC = 180°$,
$\angle ABC = \angle ADC = 90°$

Po to kartu su mokiniais nagrinėjame vadovėlio „Matematika 9, II dalis“ keletą uždavinių.

86. Apskaičiuokite trikampio ABC kampus.



I. *Pirmiausia nagrinėjame sąlygą.* Pateikiu teorinius su uždavinio sąlyga susijusius klausimus:

1) Kokias figūras matote brėžinyje?
2) Kuo ypatingi trikampio ABC kampai apskritimo atžvilgiu?
3) Kaip vadiname kampus BOC, AOB, AOC (apskritimo, kurio centras O, atžvilgiu)?
4) Kaip susiję kampų $\angle BAC$ ir $\angle BOC$; $\angle ABC$ ir $\angle AOC$; $\angle ACB$ ir $\angle AOB$ didumai?

II. *Sudarome uždavinio sprendimo planą:*

1) Rasti centrinio kampo $\angle AOC$ didumą;

2) Rasti centrinius kampus $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle AOC$ atitinkančių įbrėžtinių kampų didumus.

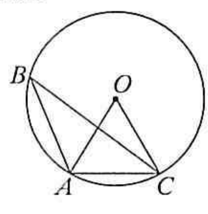
III. *Mokiniai (savarankiškai) užrašo uždavinio sprendimą:*

1) $\angle AOC = 360° - 120° - 90° = 150°$.

2) $\angle AOB$ — centrinis, $\angle ACB$ — įbrėžtinis. Kampai remiasi į tą patį lanką, todėl $\angle ACB = \frac{\angle AOB}{2} = \frac{120°}{2} = 60°$. Analogiškai $\angle BAC = \frac{\angle BOC}{2} = \frac{90°}{2} = 45°$, $\angle ABC = \frac{\angle AOC}{2} = \frac{150°}{2} = 75°$.

IV. *Apibendriname sprendimą.* Čia verta mokinių paklausti, kaip pasitikrinti, ar skaičiuodami nesuklydome. Prisimename, kad trikampio kampų suma lygi 180°. Sudėję apskaičiuotų kampų didumus, įsitikiname, kad $60° + 45° + 75° = 180°$. Aišku verta paklausti, kaip uždavinį buvo galima spręsti neieškant kampo $\angle AOC$ didumo. Be to, čia galima papildomai paklausti, kokios rūšies (pagal kampus) yra trikampis $\triangle ABC$, kuri to trikampio kraštinė ilgiausia, kuri trumpiausia.

88a. Duota: $\angle ABC = 30°$. Įrodykite, kad $\triangle AOC$ yra lygiakraštis.



I. *Sąlygos analizė naudojantis brėžiniu.* Apžvalginiai klausimai:

1) Kokios figūros pavaizduotos brėžinyje?
2) Ką galite pasakyti apie kampą ABC?
3) Ką galite pasakyti apie trikampį AOC?

II. *Įrodymo planas:*

1) Žinodami įbrėžtinio kampo ABC didumą, rasime jį atitinkančio centrinio kampo $\angle AOC$ didumą.

2) Rasime $\triangle AOC$ kampų $\angle A$ ir $\angle C$ didumus.

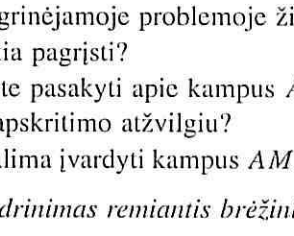
3) Nustatysime $\triangle AOC$ rūšį pagal kraštines.

III. *Įrodymas.* 1) Kampas ABC įbrėžtinis, kampas AOC — centrinis. Jie remiasi į tą patį lanką, todėl $\angle AOC = 2\angle ABC = 60°$.

2) Trikampis AOC lygiašonis, nes $OA = OC$ — apskritimo spinduliai. Lygiašonio trikampio kampai prie pagrindo yra lygūs, todėl $\angle OAC = \angle OCA$. Kadangi $\angle AOC = 60°$; tai $\angle OAC = \angle OCA = \frac{180° - 60°}{2} = 60°$.

3) Trikampio OAC visi kampai lygūs po 60°. Vadinasi, jis yra lygiakraštis: $AO = OC = AC$.

90. Du apskritimai kertasi taškuose A ir B. Per tašką A išvesta tiesė, kertanti apskritimus taškuose M ir N, ir kita tiesė, kertanti apskritimus taškuose M_1 ir N_1. Įrodykite, kad $\angle MBN = \angle M_1BN_1$.



I. *Apžvalginiai klausimai:*

1) Kas nagrinėjamoje problemoje žinoma?
2) Ką reikia pagrįsti?
3) Ką galite pasakyti apie kampus AM_1B ir ANB apskritimo atžvilgiu?
4) Kaip galima įvardyti kampus AMB ir AN_1B?

II. *Apibendrinimas remiantis brėžiniu:*

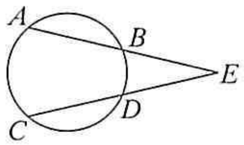
1) Kokią savybę turi kampai ANB ir AM_1B?
2) Kokią savybę turi kampai AMB ir AN_1B?
3) Kas sieja kampą M_1BN_1 ir kampus BM_1A, BN_1A?
4) Kas sieja kampą MBN ir kampus BNA ir BMA?

III. *Įrodymas.* 1) $\angle AM_1B$ ir $\angle ANB$ yra įbrėžtiniai ir remiasi į tą patį vieno apskritimo lanką, todėl $\angle AM_1B = \angle ANB = \alpha$.

2) $\angle AMB$ ir $\angle AN_1B$ yra įbrėžtiniai ir remiasi į tą patį kito apskritimo lanką, todėl $\angle AMB = \angle AN_1B = \beta$.

3) Pagal du atitinkamai lygius kampus trikampiai MBN ir M_1BN_1 panašūs, vadinasi, kampai MBN ir M_1BN_1 yra lygūs.

94. Tiesės, kuriose yra apskritimo stygos AB ir CD, kertasi taške E, esančiame apskritimo išorėje. Įrodykite, kad $EB \cdot EA = ED \cdot EC$.



I. *Paprašau mokinių užrašyti, kas yra duota ir ką reikia įrodyti.* Liepiu nubrėžti stygas AD ir BC ir taip papildyti brėžinį.

II. *Paprašau bendrai aptarti gautąjį brėžinį.* Siekiu, kad mokiniai pastebėtų:

1) įbrėžtinius kampus, besiremiančius į tą patį lanką;

2) du trikampius ($\triangle AED$ ir $\triangle CEB$), turinčius po du atitinkamai lygius kampus.

Prisimename, kokie trikampiai vadinami panašiaisiais ir jų panašumo požymius.

III. *Įrodymas.* 1) Nubrėžiame stygas AD ir BC.

2) Nagrinėjame trikampius AED ir CEB:

- kampai BAD ir BCD lygūs, nes yra įbrėžtiniai ir remiasi į tą patį lanką;
- kampas E yra bendras;
- vadinasi, trikampiai AED ir CEB panašūs.

3) Panašiųjų trikampių kraštinės proporcingos, todėl: $\frac{EB}{ED} = \frac{EC}{EA}$.

4) Iš proporcijos gauname: $EB \cdot EA = ED \cdot EC$.

Namų darbams skiriu šiuos vadovėlio „Matematika 9, II dalis“ uždavinius: **14a**, p. 58; **27**, p. 60.

1. I. Bagdonienė ir kt. *Matematika* 9. II *dalis*, TEV, Vilnius, 2000.
2. *Aktyvaus mokymosi metodai*, Garnelis, Vilnius, 1999.

IŠ DĖDĖS GENIAUS STRAZDO UŽRAŠŲ

— Dievas pasaulį sutvėrė per 7 dienas, — tarė Genius Strazdas ir užrašė tokias lygybes:

$$[(7^2+8^2+72+82)-(7^2+8^2+72+82)] : 10^2 = 0$$
$$[(8^2+9^2+82+92)-(6^2+7^2+62+72)] : 10^2 = 1$$
$$[(9^2+10^2+92+102)-(5^2+6^2+52+62)] : 10^2 = 2$$
$$[(10^2+11^2+102+112)-(4^2+5^2+42+52)] : 10^2 = 3$$
$$[(11^2+12^2+112+122)-(3^2+4^2+32+42)] : 10^2 = 4$$
$$[(12^2+13^2+122+132)-(2^2+3^2+22+32)] : 10^2 = 5$$
$$[(13^2+14^2+132+142)-(1^2+2^2+12+22)] : 10^2 = 6$$
$$[(14^2+15^2+142+152)-(0^2+1^2+2+12)] : 10^2 = 7$$