$\alpha + \omega$, 2003, Nr. 3, 32–44

Nepamirštamosios funkcinės lygtys

Juozas Juvencijus Mačys
jmacys@ktl.mii.lt

Funkcinių lygčių įvairovė didžiulė (žr. [1], [2]). Joms spręsti prisireikia įvairiausių metodų, todėl ši tema tiesiog neaprėpiama.

Dar įdomiau, kad kartais ta pati lygtis virsta daugybe skirtingų uždavinių su skirtingais atsakymais ir skirtingais sprendimo metodais — užtenka, kad pasikeistų ieškomos funkcijos apibrėžimo ar reikšmių sritis, nebešnekant apie funkcijai keliamus papildomus reikalavimus.

Pademonstruosime tai lygties

$$f(x^2+y^2) = f^2(x) + f^2(y) \tag{1}$$

pavyzdžiu. Būtent tai, kad ji gali neatpažįstamai pasikeisti, ir lemia, jog ji dažnas svečias olimpiadose ir žurnalų uždavinių skyriuose.

Tiesėje ir pustiesėje

1°. Įprasčiausias mums pasirodytų toks uždavinys:

Išspręskite (1) *funkcinę lygtį.*

Nenorint akcentuoti termino „funkcinė lygtis“, uždavinį galima suformuluoti ir kitaip:

Raskite visas funkcijas $f(x)$, kurios su visais x ir y tenkina (1) *lygybę.*

Tai, kad nenurodyta nei funkcijos apibrėžimo sritis, nei jos reikšmių sritis, ir reiškia, jog funkcija apibrėžta realiųjų skaičių aibėje $\boldsymbol{R}$ ir įgyja reikšmes toje pačioje aibėje. Vis dėlto siekiant visiško aiškumo, funkcijos apibrėžimo ir reikšmių sritys nurodomos:

Raskite visas funkcijas $f\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, su visais x ir y iš $\boldsymbol{R}$ tenkinančias sąlygą

$$f(x^2+y^2) = f^2(x) + f^2(y).$$

Šį uždavinį išspręsime kiek vėliau, 2° punkte, o dabar imsimės panašaus, tik lengvesnio uždavinio.

Raskite visas funkcijas $f\colon \boldsymbol{R}_0 \to \boldsymbol{R}$, kurios su visais $x \geqslant 0$ ir $y \geqslant 0$ tenkina sąlygą

$$f(x^2+y^2) = f^2(x) + f^2(y).$$

Sprendimas. Funkcija f apibrėžta visų neneigiamųjų skaičių aibėje $\boldsymbol{R}_0 = \{x\colon\ x \geqslant 0\}$. Imkime (1) lygybėje $x = y = \sqrt{\frac{x}{2}}$, tada $f(x) = 2f^2\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right) \geqslant 0$, o tai reiškia, kad mūsų funkcija įgyja tik neneigiamas reikšmes. Dabar (1) lygybėje imkime $x = y = 0$. Tada $f(0) = 2f^2(0)$, taigi turime du atvejus: A) $f(0) = 0$ ir B) $f(0) = \frac{1}{2}$.

A) $f(0) = 0$. Įstatę į (1) lygybę $y = 0$, gauname

$$f\left(x^2\right) = f^2(x), \tag{2}$$

todėl $f(x^2+y^2) = f(x^2)+f(y^2)$. Pakeitę šioje lygybėje x į $\sqrt{x}$, y į $\sqrt{y}$ gauname, kad su visais $x, y \geqslant 0$ teisinga lygybė

$$f(x+y) = f(x) + f(y). \tag{3}$$

Tai žinomoji Koši funkcinė lygtis (žr. [1]), kurią šiaip jau išspręsti sunku — sprendžiama be papildomų sąlygų ji turi labai egzotiškų sprendinių. Esant įprastinėms papildomoms sąlygoms — pavyzdžiui, tolydumo, aprėžtumo ar monotoniškumo — jos sprendiniai tik tiesiniai. Būtent monotoniškumu dabar ir remsimės.

Kadangi $f(y) \geqslant 0$, tai (3) lygybė reiškia, kad

$$f(x+y) \geqslant f(x),$$

taigi funkcija f didėja (plačiąja prasme) neneigiamiems x, t. y. $f(x) \leqslant f(y)$, jei tik $0 \leqslant x < y$.

Imkime (2) lygybėje $x = 1$. Tada $f(1) = f^2(1)$, todėl arba $f(1) = 0$, arba $f(1) = 1$.

Jeigu $f(1) = 0$, tai iš (3) lygybės $f(2) = 0$, tada $f(4) = 2f(2) = 0$, $f(8) = 0, \ldots, f(2^n) = 0, \ldots$, o kadangi $f(x)$ didėjanti, tai $f(x) = 0$ su visais x. Aišku, kad ši funkcija tenkina (1) lygtį.

Tegu dabar $f(1) = 1$. Kadangi iš (3) lygybės $f(2x) = 2f(x)$, $f(3x) = f(2x+x) = 3f(x)$ ir t. t., tai $f(nx) = nf(x)$. Paėmę čia $x = 1$, gauname $f(n) = n$, o paėmę $x = \frac{1}{n}$, gauname $1 = nf(\frac{1}{n})$, t. y. $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$. Pagaliau paėmę $x = \frac{m}{n}$, turime $f(m) = nf(\frac{m}{n})$, t. y. $f(\frac{m}{n}) = \frac{m}{n}$. Įrodėme, kad $f(r) = r$ visiems racionaliesiems $r \geqslant 0$.

Bet mūsų funkcija didėja, todėl nesunku įrodyti, kad $f(x) = x$ visiems $x \geqslant 0$. Iš tikrųjų, tarkime, kad kuriame nors taške $f(x) < x$. Tarp šių nelygių skaičių įstatykime racionalųjį skaičių r, $f(x) < r < x$. Kadangi $f(x)$ didėja, tai $f(r) \leqslant f(x)$, o kadangi r racionalus, tai paskutinė nelygybė reiškia, kad $r \leqslant f(x)$. Prieštara. Lygiai taip pat negali būti $f(x) > x$. Vadinasi, $f(x) = x$. Ši funkcija taip pat tenkina (1) lygtį. Gavome antrą sprendinį. Atvejis A) išnagrinėtas.

B) $f(0) = \frac{1}{2}$. Iš lygybės (1) su $y = 0$ gauname

$$f\left(x^2\right) = f^2(x) + \frac{1}{4}, \tag{4}$$

o tai be kita ko reiškia, kad $f(x^2) \geqslant \frac{1}{4}$, t. y. $f(x) \geqslant \frac{1}{4}$.

Imdami (1) lygybėje $x = y = \frac{1}{2}$, turime $f(\frac{1}{2}) = 2f^2(\frac{1}{2})$, ir kadangi $f(x) \geqslant \frac{1}{4} \neq 0$, tai $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$. Remiantis (4) lygybe $f(x^2+y^2) = f^2(x) + f^2(y) = f(x^2) - \frac{1}{4} + f(y^2) - \frac{1}{4} = f(x^2) + f(y^2) - \frac{1}{2}$, o tai reiškia, kad

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - \frac{1}{2}. \tag{5}$$

Imdami $y = x$ įsitikiname, kad jeigu $f(x) = \frac{1}{2}$, tai $f(2x) = \frac{1}{2}$. Vadinasi, $f(\frac{1}{2}) = f(1) = f(2) = \cdots = f(2^n) = \frac{1}{2}$. Lygiai taip pat (5) lygybėje vietoj x ir y imdami $\frac{x}{2}$, gauname $f(x) = 2f(\frac{x}{2}) - \frac{1}{2}$. Taigi jeigu $f(x) = \frac{1}{2}$, tai ir $f(\frac{x}{2}) = \frac{1}{2}$. Vadinasi, $f(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{4}) = \cdots = f(\frac{1}{2^n}) = \cdots = \frac{1}{2}$.

Jeigu žinotume, kad $f(x)$ monotoniška, tai iš karto būtų aišku, jog $f(x) \equiv \frac{1}{2}$. Galima apsieiti ir be monotoniškumo. Apskaičiuokime $f((x+\frac{1}{2})^2)$ dviem būdais — vieną kartą taikydami (5), po to (4), o kitą kartą — atvirkščiai:

$$f\Big(\Big(x+\frac{1}{2}\Big)^2\Big) = f\Big(x^2+x+\frac{1}{4}\Big) = f(x^2) + f\Big(x+\frac{1}{4}\Big) - \frac{1}{2},$$

$$f\Big(\Big(x+\frac{1}{2}\Big)^2\Big) = f^2\Big(x+\frac{1}{2}\Big) + \frac{1}{4} = f(x^2) + f\Big(x+\frac{1}{4}\Big) - \frac{1}{2} =$$

$$= \Big(f(x) + f\Big(\frac{1}{2}\Big) - \frac{1}{2}\Big)^2 + \frac{1}{4} = f^2(x) + \frac{1}{4} = f(x^2).$$

Sulyginę pastarųjų lygybių dešiniąsias puses, turime $f(x+\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$, arba, vėl remiantis (5) lygtimi, $f(x) + f(\frac{1}{4}) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, t. y. $f(x) = \frac{1}{2}$ su visais $x \geqslant 0$. Atvejis B) išnagrinėtas.

Taigi jeigu $f(x)$ tenkina (1) lygtį, tai arba $f(x) = 0$, arba $f(x) = \frac{1}{2}$, arba $f(x) = x$.

Paminėjome, kad įrodę (5) lygtyje funkcijos $f(x)$ monotoniškumą, turėtume kitą sprendimą. Įrodykime, kad $f(x)$ monotoniška. Imdami (5) lygtyje $y = x$ gauname $f(2x) = 2f(x) - \frac{1}{2}$. Tada imame $y = 2x$ ir gauname $f(3x) = 3f(x) - 1$. Tęsdami randame, kad $f(nx) = nf(x) - \frac{n-1}{2}$. Kadangi $f(nx) \geqslant 0$, tai $f(x) \geqslant \frac{n-1}{2n}$ visiems n, o tai reiškia, kad $f(x) \geqslant \frac{1}{2}$ visiems x. Dabar vėl iš (5) lygties $f(x+y) \geqslant f(x)$.

2°. Grįžkime prie uždavinio, kai funkcija f apibrėžta visiems x:

Raskite visas funkcijas f: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, visiems $x, y \in \boldsymbol{R}$ tenkinančias lygtį

$$f(x^2+y^2) = f^2(x) + f^2(y).$$

Sprendimas. Kadangi (1) lygties dešinioji pusė neneigiama, tai galėtų pasirodyti, kad šitas uždavinys nesiskiria nuo 1° uždavinio. Iš tikrųjų taip nėra: (1) lygties kairiosios pusės argumentas yra neneigiamas, taigi lygtis nedaug tepasako apie funkcijos $f(x)$ reikšmes su neigiamais x ir nedraudžia tai funkcijai įgyti ir neigiamų reikšmių.

Faktiškai jau nustatėme funkcijas $f(x) \geqslant 0$, kurios tenkina (1) lygtį, tad nebesunku nurodyti visas funkcijas f: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, tenkinančias (1) lygtį.

Formaliai tai galima padaryti taip. Sakykime, kad turime funkciją f: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, (1) lygties sprendinį. Nagrinėkime tą funkciją tik neneigiamiems x ir y (tai vadinama funkcijos f siauriniu). Kadangi dešinioji (taigi ir kairioji) pusė visada neneigiama, tai turime funkciją f: $\boldsymbol{R}_0 \to \boldsymbol{R}$, tenkinančią (1) lygtį.

Taigi neneigiamiesiems x arba $f(x) = 0$, arba $f(x) = \frac{1}{2}$, arba $f(x) = x$.

Nagrinėkime neigiamus argumentus. Imkime $x > 0$ ir raskime $f(-x)$. Iš (1) lygybės $f^2(-x) = f((-x)^2 + y^2) - f^2(y) = f(x^2+y^2) - f^2(y) = f^2(x)$, t. y. $f(-x) = \pm f(x)$. Tai reiškia, kad vienuose taškuose gali būti $f(-x) = -f(x)$, o kituose $f(-x) = f(x)$, taigi tokių funkcijų yra be galo daug. Beje, tą sąlygą trumpai galima užrašyti taip: $|f(-x)| = f(x)$, kai $x > 0$. Taip gauname funkciją $f(x) \equiv 0$ ir funkcijų šeimas:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kai } x \geqslant 0, \\ \pm x, & \text{kai } x < 0, \end{cases} \quad \text{ir} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{kai } x \geqslant 0, \\ \pm\frac{1}{2}, & \text{kai } x < 0. \end{cases}$$

Patikrinti, kad visos gautosios funkcijos tenkina (1) lygtį, paprasta. Pavyzdžiui, imkime funkcijas

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kai } x \geqslant 0, \\ \pm x, & \text{kai } x < 0. \end{cases}$$

Kadangi argumentas x^2+y^2 visada neneigiamas, tai kairioji (1) lygties pusė lygi x^2+y^2. Bet tokia pat ir dešinioji pusė, kadangi visos funkcijos $f(x)$ reikšmės yra x arba $-x$, ir $(\pm x)^2+(\pm y)^2=x^2+y^2$.

Taigi 2° uždavinys išspręstas.

3°. Straipsnio autorius susidomėjo, kas atsitiktų, jei nagrinėtume ne neneigiamus, kaip 1° punkte, o teigiamus argumentus. Taigi pakeiskime 1° uždavinio sąlygą $f\colon \boldsymbol{R}_0 \to \boldsymbol{R}$ į sąlygą $f\colon \boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}$ ($\boldsymbol{R}_+$ reiškia teigiamųjų skaičių aibę) ir spręskime uždavinį:

Raskite visas funkcijas $f\colon \boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}$, visiems teigiamiems x ir y tenkinančias sąlygą

$$f\left(x^2+y^2\right)=f^2(x)+f^2(y).$$

Sprendimas. Matome, kad iš apibrėžimo srities pašalinome vienintelį tašką 0, ir vis dėlto tai visiškai keičia uždavinio sprendimą. (Kai duota mažiau, tai ir spręsti sunkiau. Siūlome skaitytojui neskaityti sprendimo ir tuo įsitikinti pačiam pasikankinus — autorius tai jau padarė.)

Kaip ir 1° punkto pradžioje, imdami $x \to \sqrt{\frac{x}{2}}$, $y \to \sqrt{\frac{x}{2}}$ įsitikiname, kad $f(x) \geqslant 0$. Funkcijos f neneigiamumu toliau ne kartą remsimės. Ten imdami (1) lygtyje $x=y=0$ gavome kvadratinę lygtį reikšmei $f(0)$ rasti. Dabar nulinės reikšmės „uždraustos" ir pradėti sunkiau. Bet įsižiūrėję į lygtį matome, kad galima rasti reikšmę $f(\frac{1}{2})$. Iš tikrųjų, imkime $x=y=\frac{1}{2}$, tada $f(\frac{1}{2})=2f^2(\frac{1}{2})$, ir turime du atvejus: A) $f(\frac{1}{2})=0$ ir B) $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$.

A) $f(\frac{1}{2})=0$. Įstatome į (1) lygtį $y=\frac{1}{2}$:

$$f\left(x^2+\frac{1}{4}\right)=f^2(x). \tag{6}$$

Remdamiesi šia lygtimi, (1) lygtyje atsikratome funkcijos kvadratų:

$$f\left(x^2+y^2\right)=f\left(x^2+\frac{1}{4}\right)+f\left(y^2+\frac{1}{4}\right).$$

Pakeitę $x \to \sqrt{x}$, $y \to \sqrt{y}$ gauname

$$f(x+y)=f\left(x+\frac{1}{4}\right)+f\left(y+\frac{1}{4}\right). \tag{7}$$

Šios lygties funkcija f apibrėžta visiems teigiamiems x ir y. Įdomu, kad įstatę į ją $x=y=\frac{1}{4}$ gauname $f(\frac{1}{2})=0$, taigi (7) lygtis „atsimena" sąlygą A).

Spręskime (7) lygtį. Apskaičiuokime $f(x+\frac{1}{2})$ dviem būdais. Viena vertus, (7) lygybėje imant $y=\frac{1}{2}$,

$$f\left(x+\frac{1}{2}\right)=f\left(x+\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right).$$

Kita vertus, remdamiesi (7) lygybe

$$\begin{aligned}
f\left(x+y+\frac{1}{2}\right)&=f\left(x+\frac{1}{4}+y+\frac{1}{4}\right)=f\left(x+\frac{1}{2}\right)+f\left(y+\frac{1}{2}\right)=\\
&=f\left(x+\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)+f\left(y+\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)=\\
&=f\left(x+\frac{1}{4}\right)+f\left(y+\frac{1}{4}\right)+2f\left(\frac{3}{4}\right)=f(x+y)+2f\left(\frac{3}{4}\right),
\end{aligned}$$

ir pakeitę $x \to \frac{x}{2}$, $y \to \frac{x}{2}$, gauname (tą patį gautume imdami $y = 0$, bet to daryti negalima, x ir y teigiami!)

$$f\left(x + \frac{1}{2}\right) = f(x) + 2f\left(\frac{3}{4}\right).$$

Sulyginę abi gautas $f(x + \frac{1}{2})$ išraiškas, matome, kad

$$f\left(x + \frac{1}{4}\right) = f(x) + f\left(\frac{3}{4}\right).$$

Paėmę čia $x = \frac{1}{4}$, turime $0 = f(\frac{1}{4}) + f(\frac{3}{4})$, taigi $f(\frac{3}{4}) = 0$ ir

$$f\left(x + \frac{1}{4}\right) = f(x). \tag{8}$$

Dabar (7) lygtyje jau galime atsikratyti argumentuose dėmens $\frac{1}{4}$:

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Gavome Koši lygtį, bet jos spręsti nebereikia: paėmę $x \in (0, \frac{1}{2})$, $y = \frac{1}{2} - x$ matome, kad $0 = f(x) + f(\frac{1}{2} - x)$, t. y. $f(x) = 0$ intervale $(0, \frac{1}{2})$. Bet $f(\frac{1}{2}) = 0$, todėl $f(x) = 0$ intervale $(0, \frac{1}{2}]$. O kadangi remiantis (8) lygybe $f(x)$ periodiška su periodu $\frac{1}{4}$, tai $f(x) = 0$ visur.

B) $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$. Įstatome į (1) lygybę $y = \frac{1}{2}$, tada

$$f\left(x^2 + \frac{1}{4}\right) = f^2(x) + \frac{1}{4}. \tag{9}$$

Kadangi $f^2(x) = f(x^2 + \frac{1}{4}) - \frac{1}{4}$, tai (1) lygtyje galime atsikratyti funkcijos reikšmių kvadratų:

$$\begin{aligned} f(x^2 + y^2) &= f\left(x^2 + \frac{1}{4}\right) + f\left(y^2 + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}, \\ f(x + y) &= f\left(x + \frac{1}{4}\right) + f\left(y + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{10}$$

Elkimės panašiai kaip A) atveju. Viena vertus,

$$f\left(x + \frac{1}{2}\right) = f\left(x + \frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) - \frac{1}{2}.$$

Antra vertus,

$$\begin{aligned} f\left(x + y + \frac{1}{2}\right) &= f\left(\left(x + \frac{1}{4}\right) + \left(y + \frac{1}{4}\right)\right) = f\left(x + \frac{1}{2}\right) + f\left(y + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = \\ &= f\left(x + \frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) - \frac{1}{2} + f\left(y + \frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \\ &= f\left(x + \frac{1}{4}\right) + f\left(y + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2} + 2f\left(\frac{3}{4}\right) - 1 = f(x + y) + 2f\left(\frac{3}{4}\right) - 1, \end{aligned}$$

ir pakeitus $x \to \frac{x}{2}$, $y \to \frac{x}{2}$,

$$f\left(x + \frac{1}{2}\right) = f(x) + 2f\left(\frac{3}{4}\right) - 1.$$

Sulyginę pastarąsias $f(x+\frac{1}{2})$ išraiškas, gauname

$$f\left(x+\frac{1}{4}\right)=f(x)+f\left(\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{2}.$$

Remdamiesi šia lygybe, (10) lygtyje vėl atsikratome $\frac{1}{4}$:

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+2f\left(\frac{3}{4}\right)-\frac{3}{2}.$$

Pažymėję $k=2f(\frac{3}{4})-\frac{3}{2}$, turime

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+k. \tag{11}$$

Keičiame (9) lygybėje x į $x+y$:

$$f\left(x^2+y^2+2xy+\frac{1}{4}\right)=f^2(x+y)+\frac{1}{4}.$$

Remiantis (11) lygybe,

$$f\left(x^2+y^2\right)+f\left(2xy+\frac{1}{4}\right)+k=\left(f(x)+f(y)+k\right)^2+\frac{1}{4},$$

o remiantis (1) lygybe,

$$f(2xy)+f\left(\frac{1}{4}\right)+2k=2f(x)f(y)+2kf(x)+2kf(y)+k^2+\frac{1}{4}.$$

Įstatę $y=\frac{1}{2}$, gauname

$$f(x)+f\left(\frac{1}{4}\right)+2k=f(x)+2kf(x)+k+k^2+\frac{1}{4},$$

t. y.

$$2kf(x)=k-k^2-\frac{1}{4}+f\left(\frac{1}{4}\right).$$

Jeigu $k\neq 0$, tai turime $f(x)=c$ (c — tam tikras skaičius), o kadangi $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$, tai $f(x)\equiv\frac{1}{2}$ ir ši funkcija yra funkcinės lygties sprendinys. Jeigu $k=0$, tai iš (11) gauname (3) lygybę, t. y.

$$f(x+y)=f(x)+f(y),$$

o kadangi f neneigiama, tai

$$f(x+y)\geqslant f(x).$$

Paėmę (3) lygtyje $x=y=\frac{1}{2}$, turime $f(1)=1$. Jau matėme 1° punkte, kaip spręsti Koši lygtį esant monotoniško didėjimo sąlygai, kai $f(1)=1$. Šiuo atveju vienintelis lygties sprendinys yra funkcija $f(x)=x$.

Taigi nors sprendimas gerokai skiriasi, 1° ir 3° punktų sprendiniai iš esmės yra tie patys: $f(x)=0$, $f(x)=\frac{1}{2}$ ir $f(x)=x$ (skirtumas tik tas, kad dabar $f(x)$ neapibrėžta taške 0).

Skaičių sekos

Uždavinių forma ir sprendimo metodai neįtikėtinai pasikeičia, kai (1) lygtį tenkinančios funkcijos f apibrėžimo sritis yra sveikųjų skaičių aibė (ar jos poaibiai).

4°. Sakykime, kad funkcija f apibrėžta sveikųjų neneigiamųjų skaičių aibėje $N_0 = \{0\} \cup N$ ir įgyja reikšmes toje pačioje aibėje. Kitaip sakant, reikia rasti (1) lygtį tenkinančias funkcijas $f\colon N_0 \to N_0$. Dar kitaip tai būtų galima suformuluoti taip:

Raskite visas neneigiamųjų sveikųjų skaičių sekas (a_n), tenkinančias sąlygą

$$a_{m^2+n^2} = a_m^2 + a_n^2, \quad m \geqslant 0,\ n \geqslant 0.$$

Sprendimas. Persirašykime sąlygą įprasčiau:

$$f\left(m^2+n^2\right) = f^2(m) + f^2(n), \quad m \geqslant 0,\ n \geqslant 0. \tag{12}$$

Imkime šioje lygtyje $m = n = 0$. Tada $f(0) = 2f^2(0)$, $f(0)(2f(0) - 1) = 0$. Kadangi pagal sąlygą $f(0) yra$ sveikasis skaičius, tai reiškinys skliaustuose $2f(0) - 1$ yra nelyginis skaičius, taigi nelygus nuliui. Vadinasi, $f(0) = 0$.

Grįžkime prie (12) lygties ir imkime $n = 0$. Tada

$$f\left(m^2\right) = f^2(m), \tag{13}$$

todėl (12) lygtį galima perrašyti taip:

$$f\left(m^2+n^2\right) = f(m^2) + f(n^2). \tag{14}$$

Jeigu dabar pažymėtume $m^2 = x$, $n^2 = y$, gautume Koši lygtį

$$f(x+y) = f(x) + f(y),$$

kurią išspręsti sveikųjų skaičių aibėje būtų labai paprasta (žr. 1° punktą). Deja, čia x ir y gali įgyti tik reikšmes, lygias sveikųjų skaičių kvadratams, ir tai visiškai keičia reikalą.

Imkime (13) lygtyje $x = 1$, tada $f(1) = f^2(1)$ ir gauname, kad A) $f(1) = 0$ arba B) $f(1) = 1$. Atskirai išnagrinėkime šiuos du atvejus.

A) $f(1) = 0$. Remiantis (14) lygtimi $f(2) = f(1^2 + 1^2) = f^2(1) + f^2(1) = 0$. Tada remiantis (13) lygtimi $f(4) = f(2^2) = f^2(2) = 0$ ir vėl galima judėti į priekį: $f(5) = f\left(1^2 + 2^2\right) = f^2(1) + f^2(2) = 0$. Bet štai liko neapskaičiuota reikšmė $f(3)$. Kadangi 3 negalima išreikšti dviejų kvadratų suma, tai reikia naujos idėjos. Čia mums padeda garsioji tapatybė $3^2 + 4^2 = 5^2$:

$$0 = f^2(5) = f(5^2) = f(3^2 + 4^2) = f^2(3) + f^2(4),$$

taigi $0 = f^2(3) + 0$ ir $f(3) = 0$.

Dabar galime eiti toliau: $f(8) = f(2^2 + 2^2) = f^2(2) + f^2(2) = 0$, $f(9) = f(3^2) = f^2(3) = 0$, $f(10) = f(1^2 + 3^2) = f^2(1) + f^2(3) = 0$. Liko dvi skylės: $f(6)$ ir $f(7)$. Užlopyti pirmąją mokame: perrašę taikytą tapatybę kaip $6^2 + 8^2 = 10^2$, gauname $0 = f(10^2) = f^2(6) + f^2(8)$, taigi $0 = f^2(6) + 0$ ir $f(6) = 0$.

O štai apskaičiuoti $f(7)$ galima taip: kadangi $50 = 1^2 + 7^2 = 5^2 + 5^2$, tai $f(50) = f(1^2 + 7^2) = f(5^2 + 5^2)$, ir $f^2(1) + f^2(7) = f^2(5) + f^2(5)$, $0 + f^2(7) = 0 + 0$, taigi $f(7) = 0$.

Jau apskaičiavome $f(n)$ reikšmes, kai $n \leqslant 10$. Suvokiame, kad taip galima eiti ir toliau:

$$\begin{aligned} 11^2 + 2^2 &= 10^2 + 5^2, \\ 12^2 + 1^2 &= 9^2 + 8^2, \\ 13^2 + 1^2 &= 11^2 + 7^2, \\ 14^2 + 2^2 &= 10^2 + 10^2, \\ 15^2 &= 12^2 + 9^2. \end{aligned} \tag{15}$$

Žinodami mažesnių argumentų funkcijos reikšmes, randame didesnių argumentų funkcijos reikšmes. Toliau mums padės tapatybės ($k \geqslant 3$), kurias patikrinti elementaru:

$$\begin{aligned} (5k+1)^2 + 2^2 &= (4k+2)^2 + (3k-1)^2, \\ (5k+2)^2 + 1^2 &= (4k+1)^2 + (3k+2)^2, \\ (5k+3)^2 + 1^2 &= (4k+3)^2 + (3k+1)^2, \\ (5k+4)^2 + 2^2 &= (4k+2)^2 + (3k+4)^2, \\ (5k+5)^2 &= (4k+4)^2 + (3k+3)^2. \end{aligned} \tag{16}$$

Matome, kad taip pasieksime bet kurį skaičių n (indukcija!), taigi $f(n) = 0$ visiems $n \in N_0$.

B) $f(1) = 1$. Pasirodo, kad viskas einasi beveik taip pat: paeiliui apskaičiuojame visas $f(n)$ reikšmes.

Iš tikrųjų, remiantis (14) lygtimi, $f(2) = f(1^2 + 1^2) = f^2(1) + f^2(1) = 1 + 1 = 2$, remiantis (3) lygtimi, $f(4) = f(2^2) = f^2(2) = 4$, $f(5) = f(1^2 + 2^2) = f^2(1) + f^2(2) = 1 + 4 = 5$. Vėl tapatybė $3^2 + 4^2 = 5^2$ padeda apskaičiuoti $f(3)$: $25 = f^2(5) = f(5^2) = f(3^2 + 4^2) = f^2(3) + f^2(4)$, ir $f^2(3) = 25 - 4^2 = 9$.

Dabar paaiškėja, kodėl nagrinėjame tik neneigiamas reikšmes. Todėl kad kitaip gautume $f(3) = \pm 3$ ir uždavinys taptų daug sudėtingesnis. O dabar lieka tik reikšmė $f(3) = 3$ Tad galime judėti toliau kaip ir atveju A): $f(8) = f(2^2 + 2^2) = f^2(2) + f^2(2) = 4 + 4 = 8$, $f(9) = f(3^2) = f^2(3) = 9$, $f(10) = f(1^2 + 3^2) = f^2(1) + f^2(3) = 1 + 9 = 10$.

Vėl $6^2 + 8^2 = 10^2$, todėl $10^2 = f^2(10) = f(10^2) = f(6^2 + 8^2) = f^2(6) + f^2(8)$, ir $f^2(6) = 10^2 - 8^2 = 36$, $f(6) = 6$. O kadangi $1^2 + 7^2 = 5^2 + 5^2$, tai $f(1^2 + 7^2) = f(5^2 + 5^2)$, $f^2(1) + f^2(7) = f^2(5) + f^2(5)$, $1 + f^2(7) = 25 + 25$, ir $f(7) = 7$.

Taigi $f(n) = n$ visoms n reikšmėms iki 10. Įrodysime, kad visoms n reikšmėms $f(n) = n$. Tam galima remtis (16) tapatybėmis, bet galima naudotis ir paprastesnėmis (nors gal ir kiek sunkiau atspėjamomis) tapatybėmis:

$$\begin{aligned} (2k+1)^2 + (k-2)^2 &= (2k-1)^2 + (k+2)^2, \\ (2k+2)^2 + (k-4)^2 &= (2k-2)^2 + (k+4)^2 \end{aligned}$$

(žinoma, jos tinka ir ten).

Kadangi su $k \geqslant 4$ bus $2k + 2 > k + 4$, tai nuosekliai galėsime apskaičiuoti tolesnes reikšmes:

$$\begin{aligned} f^2(2k+1) &= f^2(2k-1) + f^2(k+2) - f^2(k-2), \\ f^2(2k+2) &= f^2(2k-2) + f^2(k+2) - f^2(k-4). \end{aligned}$$

Atvejo B) nagrinėjimas baigtas.

Vadinasi, 4° punkto funkcinė lygtis turi du sprendinius: $f(n) = 0$ ir $f(n) = n$.

5°. Jau minėjome, kad nagrinėti neigiamas funkcijos reikšmes būtų sudėtinga, bet nelabai natūralu reikalauti, kad jos būtų sveikosios. Taigi išspręskime uždavinį:

Raskite visas neneigiamųjų skaičių sekas (a_n), tenkinančias sąlygą

$$a_{m^2+n^2} = a_m^2 + a_n^2, \quad m \geqslant 0,\ n \geqslant 0.$$

Sprendimas. Ieškome (1) lygties sprendinių $f\colon \boldsymbol{N}_0 \to \boldsymbol{R}_0$. Šį kartą (12) lygtyje paėmę $m = n = 0$, gauname lygtį $f(0) = 2f^2(0)$, kuri turi du sprendinius: $f(0) = 0$ ir $f(0) = \frac{1}{2}$. Pirmu atveju sprendimas lieka tas pats, taigi užtenka išnagrinėti antrą atvejį.

C) $f(0) = \frac{1}{2}$. Imdami (12) lygtyje $n = 0$, gauname

$$f\left(m^2\right) = f^2(m) + \frac{1}{4}. \tag{17}$$

Iš čia, kai $m = 1$, turime $f(1) = f^2(1) + \frac{1}{4}$, $(f(1) - \frac{1}{2})^2 = 0$, t. y. $f(1) = \frac{1}{2}$. Toliau skaičiuojame panašiai kaip 4° punkte, tik remiamės ne (13), o (17) lygtimi: remiantis (12) lygtimi, $f(2) = f^2(1) + f^2(1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$; remiantis (17) lygtimi, $f(4) = f^2(2) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$; $f(5) = f(1^2 + 2^2) = f^2(1) + f^2(2) = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = f^2(5) + \frac{1}{4} = f(25) = f(3^2 + 4^2) = f^2(3) + f^2(4)$, $f^2(3) = \frac{1}{4}$, $f(3) = \frac{1}{2}$; $f(50) = f(1^2 + 7^2) = f(5^2 + 5^2)$, $f^2(1) + f^2(7) = f^2(5) + f^2(5)$, $f^2(7) = \frac{1}{4}$, $f(7) = \frac{1}{2}$; $f(8) = f(2^2 + 2^2) = f^2(2) + f^2(2) = \frac{1}{2}$; $f(9) = f^2(3) + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$; $f(10) = f(1^2 + 3^2) = f^2(1) + f^2(3) = \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} = f^2(10) + \frac{1}{4} = f(10^2) = f(6^2 + 8^2) = f^2(6) + f^2(8)$, $f^2(6) = \frac{1}{4}$, $f(6) = \frac{1}{2}$, ir t. t.

Taigi 5° uždavinys turi 3 sprendinius: $f(n) = 0$, $f(n) = \frac{1}{2}$ ir $f(n) = n$.

6°. Kaip jau minėjome, atsisakyti neneigiamumo sąlygos keblu. Tiesa, ją galima pakeisti monotoniškumo sąlyga. Tada uždavinys tampa toks:

Raskite visas monotoniškas sekas (a_n), tenkinančias sąlygą

$$a_{m^2+n^2} = a_m^2 + a_n^2, \quad m \geqslant 0,\ n \geqslant 0.$$

Pastaba. Būtent šis uždavinys buvo pasiūlytas 2002 metų „Baltijos kelio“ olimpiadoje Tartu (Estija). Jį išsprendė tik dvi komandos iš dešimt; vėliau Sankt Peterburgo komandos vadovai prisipažino (bet nesiteikė to pasakyti dar svarstant uždavinius), kad panašų uždavinį jų komanda buvo sprendusi.

Sprendimas. Ieškome (1) lygties monotoniškų sprendinių $f\colon \boldsymbol{N}_0 \to \boldsymbol{R}$. Monotoniškumą suprasime plačiąja prasme: kai $m < n$, tai arba $a_m \leqslant a_n$ visiems nariams (seka monotoniškai didėja plačiąja prasme), arba $a_m \geqslant a_n$ visiems nariams (seka monotoniškai mažėja plačiąja prasme).

Nagrinėkime tuos pačius 3 atvejus, kaip ir 4° ir 5° punktuose.

A) $f(0) = 0$, $f(1) = 0$. Tada $f(2) = 0$, $f(8) = f(2^2 + 2^2) = 0$, $f(8^2 + 8^2) = 0$ ir t. t., ir dėl monotoniškumo visi sekos nariai lygūs 0, $f(n) = 0$.

B) $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Seka didėja, todėl visi jos nariai neneigiami. Vadinasi, tinka senas sprendimas (t. y. galima naudotis sekos narių neneigiamumu) ir gauname sprendinį $f(n) = n$.

C) $f(0) = \frac{1}{2}$. Tada $f(1) = f(0^2 + 1^2) = f^2(0) + f^2(1)$, t. y. $(f(1) - \frac{1}{2})^2 = 0$, $f(1) = \frac{1}{2}$; $f(2) = f^2(1) + f^2(1) = \frac{1}{2}$; $f(2^2 + 2^2) = f^2(2) + f^2(2) = \frac{1}{2}$, $f(8^2 + 8^2) = f^2(8) + f^2(8) = \frac{1}{2}$ ir t. t. Vadinasi, kaip norint toli yra sekos narių, lygių $\frac{1}{2}$, todėl remiantis monotoniškumu visi jie lygūs $\frac{1}{2}$, $f(n) = \frac{1}{2}$.

Matome, kad monotoniškumas labai palengvina sprendimą. Parodysime, kaip jis padeda spręsti uždavinį ir atveju B) (nes sprendimas be tos sąlygos, kaip matėme, nėra paprastas).

Jeigu žinotume, kad reikšmės įgyjamos sveikųjų skaičių aibėje, o $f(n)$ griežtai monotoniška, tai atveju B) sprendimas visiškai supaprastėtų. Pavyzdžiui, radę, kad $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(4) = 4$, matytume, kad $f(3) = 3$. O radę, kad $f(5) = 5$, $f(10) = 10$, iš karto galėtume teigti, kad $f(6) = 6$, $f(7) = 7$, $f(8) = 8$, $f(9) = 9$ (kitaip keturios sveikosios reikšmės tarp 5 ir 10 „netelpa"). Žodžiu, kadangi $f(n) = n$ kai kuriems pakankamai dideliems n, tai būtų galima daryti išvadą, kad $f(n) = n$ visiems n.

Bet sprendimas palyginti nesudėtingas ir mūsų atveju, kai monotoniškumas negriežtas, o įgyjamos reikšmės bet kokios. Kadangi $f(2n^2) = f(n^2 + n^2) = f^2(n) + f^2(n) = 2f^2(n)$, o $f(n^2) = f(0^2 + n^2) = f^2(n)$, tai visai nesunku apskaičiuoti „daug" $f(n)$ reikšmių — būtent tas reikšmes, kai n yra dvejeto laipsnis: $f(2) = 2$, $f(2^2) = f^2(2) = 4$, $f(2^3) = f(2 \cdot 2^2) = 2f^2(2) = 8$, $f(2^4) = f^2(2^2) = 16$ ir t. t.

Taigi $f(2^k) = 2^k$. Kadangi bet kuris skaičius n yra tarp dviejų gretimų dvejeto laipsnių, tai kiekvienam n yra toks k, kad $2^k \leqslant n \leqslant 2^{k+1}$. Kadangi mūsų seka monotoniškai didėja, tai $f(2^k) \leqslant f(n) \leqslant f(2^{k+1})$, o kadangi $\frac{1}{2^{k+1}} \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{2^k}$, tai $\frac{f(2^k)}{2^{k+1}} \leqslant \frac{f(n)}{n} \leqslant \frac{f(2^{k+1})}{2^k}$, t. y.

$$\frac{2^k}{2^{k+1}} \leqslant \frac{f(n)}{n} \leqslant \frac{2^{k+1}}{2^k}, \qquad \frac{1}{2} \leqslant \frac{f(n)}{n} \leqslant 2.$$

Įrodėme, kad kiekvienam n santykis $\frac{f(n)}{n}$ yra tarp $\frac{1}{2}$ ir 2. O dabar tarkime, kad yra toks m, kad $f(m) \neq m$. Tada $\frac{f(m)}{m} \neq 1$, t. y. $\frac{f(m)}{m} < 1$ arba $\frac{f(m)}{m} > 1$.

Sakykime, kad $\frac{f(m)}{m} < 1$. Tada pakankamai didelis $\frac{f(m)}{m}$ laipsnis „mažas", bent jau mažesnis už $\frac{1}{2}$. Kad gautume prieštarą, liko parodyti, kad yra sekos narių, kurie lygūs $\frac{f(m)}{m}$ dideliems laipsniams.

Imkime minėtąjį m. Tada $f(m^2) = f^2(m)$, $f(m^4) = f^2(m^2) = f^4(m)$, $f(m^8) = f^2(m^4) = f^8(m), \ldots, f(m^{2^s}) = f^{2^s}(m)$. Taigi

$$\frac{f(m^{2^s})}{m^{2^s}} = \frac{f^{2^s}(m)}{m^{2^s}} = \left(\frac{f(m)}{m}\right)^{2^s}$$

pakankamai dideliems s bus mažas.

Jeigu $\frac{f(m)}{m} > 1$, lygiai taip pat įrodome, kad atsiras sekos narių, kuriems santykis $\frac{f(n)}{n}$ bus didesnis už 2.

Beje, jeigu monotoniškumą suprastume siaurąja (griežtąja) prasme, tai iš rastųjų sprendinių $f(n) = 0$, $f(n) = \frac{1}{2}$ ir $f(n) = n$ pirmuosius du reikėtų atmesti.

7°. Dabar išsiaiškinkime, kodėl 4°–6° punktuose reikėjo sekos neneigiamumo arba monotoniškumo sąlygos, ir bandykime rasti visas sekas, tenkinančias sąlygą

$$a_{m^2+n^2} = a_m^2 + a_n^2, \quad m \geqslant 0, \ n \geqslant 0$$

(kitais žodžiais, raskime visas funkcijas $f\colon \boldsymbol{N}_0 \to \boldsymbol{R}$, tenkinančias (1) lygtį). Kodėl gi tokios ar panašios sąlygos neprireikė 1° punkte, kai nagrinėjome $f\colon \boldsymbol{R}_0 \to \boldsymbol{R}$? Atsakymas paprastas: neneigiamųjų skaičių aibėje kiekvieną skaičių galima išreikšti kaip $x^2 + y^2$, o sveikųjų neneigiamųjų skaičių aibėje — ne kiekvieną. Jau minėjome, kad tada, pavyzdžiui, $f^2(3) = 9$, ir $f(3) = \pm 3$. Dalykas tas, kad 3 nėra nei kvadratas, nei išreiškiamas dviejų kvadratų suma.

Apskritai dviejų kvadratų suma neišreiškiami visi pavidalo $4n+3$ skaičiai. Iš tikrųjų, bet kurio lyginio skaičiaus kvadratas $(2m)^2 = 4m^2$ dalijasi iš 4, o bet kurio nelyginio skaičiaus kvadratą $(2m+1)^2 = 4m^2+4m+1$ dalijant iš 4 gaunama liekana 1. Todėl kvadratą ar dviejų kvadratų sumą dalijant iš 4 gaunama liekana 0, 1 arba 2. Kadangi $4n+3$ liekana lygi 3, tai teiginys įrodytas.

Taigi matome, kad visų sekų radimo uždavinys tiesiogiai susijęs su klausimu: kokie skaičiai išreiškiami dviejų kvadratų suma? Skaičių teorijoje randame išsamų atsakymą (tik jį įrodyti gana sunku): n pats yra kvadratas arba išreiškiamas dviejų kvadratų suma tada ir tik tada, kai į skaičiaus n skaidinį pirminiais daugikliais pavidalo $4k+3$ pirminiai įeina lyginiu laipsniu. Pavyzdžiui, $7 = 4\cdot 1+3$ neišreiškiamas, o $13 = 4\cdot 3+1 = 3^2+2^2$ išreiškiamas, $14 = 2\cdot 7 = 2(4+3)$ neišreiškiamas, o $26 = 2\cdot 13 = 2(4\cdot 3+1) = 5^2+1^2$ išreiškiamas dviejų kvadratų suma.

Beje, prisiminkime, kaip apskaičiavome $f(7)$: iš lygybės $7^2+1^2 = 5^2+5^2$ radome, kad $f(7^2+1^2) = f(5^2+5^2)$, iš čia $f^2(7) = f^2(5)+f^2(5)-f^2(1)$. Kitaip sakant, ši lygtis susijusi ir su tokiu skaičių teorijos klausimu: Kurie skaičiai keletu būdų išreiškiami dviejų kvadratų suma?

Sakykime, kad funkcija $f\colon N_0 \to \boldsymbol{R}$ tenkina (1) lygtį. Tada funkcija $g = |f|$ įgyja tik neneigiamas reikšmes, $g\colon N_0 \to \boldsymbol{R}_0$ ir taip pat tenkina lygtį. Bet 5° punkte matėme, kad tada $g(n) = 0$, $g(n) = \frac{1}{2}$ arba $g(n) = n$, t. y. $|f(n)| = 0$, $|f(n)| = \frac{1}{2}$ arba $|f(n)| = n$. Sąlyga (1) reiškia, kad tikrai neneigiamos yra tos $f(n)$ reikšmės, kai n išreiškiamas kvadratu arba kvadratų suma, bet ši sąlyga nevaržo kitokių funkcijos reikšmių.

Vadinasi, (1) lygtį tenkina tik tokios funkcijos:

1) $f(n) = 0$;

2) $f(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{jei } n \text{ pats yra kvadratas arba išreiškiamas dviejų kvadratų suma,} \\ \pm\frac{1}{2}, & \text{jei ne;} \end{cases}$

3) $f(n) = \begin{cases} n, & \text{jei } n \text{ pats yra kvadratas arba išreiškiamas dviejų kvadratų suma,} \\ \pm n, & \text{jei ne.} \end{cases}$

8°. Gali kilti klausimas: Kodėl neatsisakius 0 ir nagrinėjant lygtį sveikųjų skaičių aibėje? Kitaip sakant, galima būtų bandyti rasti (1) lygties sprendinius $f\colon N \to \boldsymbol{R}_0$ (o tada ir $f\colon N \to \boldsymbol{R}$). Reikalas čia toks: išmetus 0, labai susiaurėja reiškinio x^2+y^2 įgyjamų reikšmių aibė — jei anksčiau jai priklausė sveikųjų skaičių kvadratai, tai dabar — nebūtinai. Ir jei anksčiau turėdami, pavyzdžiui, $f(0)$ ir $f(2)$ mokėjome apskaičiuoti $f(4)$, tai dabar — nebemokame: 4 nėra dviejų *natūraliųjų* skaičių kvadratų suma.

Žinoma, nekelia jokių abejonių, kad 5° ir 6° punkto sprendiniai $f(n) = 0$, $f(n) = \frac{1}{2}$ ir $f(n) = n$ tiks ir dabar. Klausimas kitas — ar nėra daugiau sprendinių.

Galėtų pasirodyti, kad tai paprasta. Sakykime, kad $f(1) = a$. Tada galima apskaičiuoti $f(2) = f(1^2+1^2) = f^2(1)+f^2(1) = 2a^2$, dabar $f(5) = f(1^2+2^2) = f^2(1)+f^2(2) = a^2+4a^4$, taip pat $f(8) = f(2^2+2^2) = f^2(2)+f^2(2) = 4a^4+4a^4 = 8a^4$. Kitaip sakant, žinodami funkcijos reikšmes su kai kuriais argumentais, galime apskaičiuoti f reikšmes tiems argumentams, kurie išreiškiami kaip dviejų ankstesnių argumentų kvadratų suma (vadinasi, netgi apskaičiuoti be galo daug tokių reikšmių). Dabar kyla mintis kituose taškuose apibrėžti funkciją beveik bet kaip ir gauti lygties sprendinį.

Vis dėlto čia pat mūsų laukia sunkumai. Pavyzdžiui, kadangi $f(25) = f(3^2+4^2) = f^2(3)+f^2(4)$, tai reikšmės $f(3)$, $f(4)$ ir $f(25)$ susijusios ir jų bet kaip nepasirinksi.

To negana. Žinome sprendinį $f(n) = n$. Tai reiškia, kad $f(1) = 1$. Bet ar ši sąlyga garantuoja, kad $f(n) = n$? Žinoma, iš karto gauname $f(2) = f(1^2+1^2) = f^2(1)+f^2(1) = 2$, $f(5) = f^2(1)+f^2(2) = 5$, $f(8) = f(2^2+2^2) = f^2(2)+f^2(2) = 8$. Bet štai, kaip jau sakėme, nemokame paprastai apskaičiuoti $f(4)$. Vis dėlto išsisukti iš padėties pavyksta.

Kaip ir anksčiau, kadangi $1^2+7^2=5^2+5^2$, tai galime rasti $f(7)$: $f^2(1)+f^2(7)=f^2(5)+f^2(5)$, $1+f^2(7)=25+25$, $f(7)=7$. Kadangi $7^2+4^2=8^2+1^2$, tai $f^2(4)=64+1-49=16$, $f(4)=4$. Remdamiesi lygybėmis $2^2+11^2=5^2+10^2$ ir $1^2+13^2=7^2+11^2$, turime:

$$f^2(2)+f^2(11)=f^2(5)+f^2(10),$$
$$f^2(1)+f^2(13)=f^2(7)+f^2(11).$$

Sudedame pastarąsias dvi lygybes:

$$4+1+f^2(13)=25+49+f^2(10).$$

Tada

$$f^2(2^2+3^2)=69+f^2(1^2+3^2),$$
$$\left[4+f^2(3)\right]^2=69+\left[1+f^2(3)\right]^2,$$
$$6f^2(3)=54, \quad f^2(3)=9, \ f(3)=3.$$

Dabar jau papraščiau: $f(10)=f^2(1)+f^2(3)=10$. Kadangi $11^2+2^2=10^2+5^2$, tai $f^2(11)=f^2(10)+f^2(5)-f^2(2)=121$, $f(11)=11$. Kadangi $3^2+11^2=7^2+9^2$, tai $f^2(9)=9+121-49=81$, $f(9)=9$. Pagaliau $2^2+9^2=6^2+7^2$, todėl $f(6)=6$. O kai jau žinome $f(n)$ reikšmes nuo $n=1$ iki $n=10$, tai remdamiesi indukcija mokame įrodyti, kad $f(n)=n$ visiems n.

Panašiai įsitikiname, kad jeigu $f(1)=0$, tai ir $f(n)=0$. Iš tikrųjų, tada $f(2)=0$, $f(5)=0$, $f(8)=0$, $f(7)=0$, $f(4)=0$. Todėl $f(7)=f^2(4)+f^2(1)=0$. Bet $17^2+1^2=13^2+11^2$, todėl $0=f^2(13)+f^2(11)$, $f(11)=0$, $f(13)=0$. Kadangi $13=2^2+3^2$, tai $0=f^2(2)+f^2(3)$, $f(3)=0$. Vėl $11^2+3^2=9^2+7^2$, taigi $f(9)=0$. Pagaliau $2^2\neq 9^2=6^2+7^2$, todėl $f(6)=0$.

Dabar sakykime, kad $f(1)=\frac{1}{2}$. Įsitikinkime, kad $f(n)=\frac{1}{2}$. Iš tikrųjų, $f(2)=2f^2(1)=\frac{1}{2}$, $f(8)=\frac{1}{2}$, $f(5)=\frac{1}{2}$, $f(7)=\frac{1}{2}$. Vėl $7^2+4^2=8^2+1^2$, todėl $f(4)=\frac{1}{2}$, taip pat $f(17)=\frac{1}{2}$.

Iš $13^2+1^2=11^2+7^2$ turime $f(13)=f(11)$, tada iš $17^2+1^2=13^2+11^2$ gauname $\frac{1}{2}=2f^2(13)$, $f(13)=f(11)=\frac{1}{2}$.

Iš $11^2+2^2=10^2+5^2$ turime $f(10)=\frac{1}{2}$, $f(10)=f^2(3)+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$, $f(3)=\frac{1}{2}$. Todėl $f(18)=f(3^2+3^2)=2f^2(3)=\frac{1}{2}$ ir kadangi $18^2+4^2=14^2+12^2$, tai $f^2(14)+f^2(12)=\frac{1}{2}$. Bet $14^2+2^2=10^2+10^2$, todėl $f(14)=\frac{1}{2}$, taigi ir $f(12)=\frac{1}{2}$.

Dabar $12^2+1^2=8^2+9^2$, taigi $f(9)=\frac{1}{2}$. Kadangi $9^2+2^2=7^2+6^2$, tai $f(6)=\frac{1}{2}$. Vėl turime $f(n)=\frac{1}{2}$, kai $1\leqslant n\leqslant 10$, ir remdamiesi indukcija mokame įrodyti, kad $f(n)=\frac{1}{2}$ visiems n.

2004 metų Lietuvos moksleivių matematikos olimpiadoje buvo sprendžiamas toks autoriaus pasiūlytas uždavinys.

Begalinė realiųjų skaičių seka a_n ($n\in N$) tenkina sąlygą

$$a_{n^2+m^2}=a_n^2+a_m^2, \quad k\in N,\ m\in N.$$

Ar gali a_1 būti lygus:

a) 1; b) -1; c) $\frac{1}{3}$; d) $-\frac{1}{3}$; e) 0?

Atvejais a), b) ir e) problemų nekyla: nesunku parašyti atitinkamų sekų pavyzdžius: a) 1, 2, 3, ...; b) -1, 2, 3, 4, ...; c) 0, 0, 0, ... O štai kai $a_1=\frac{1}{3}$ (žinoma, ir kai $a_1=-\frac{1}{3}$), tokia seka neegzistuoja. Tai nustatyti padeda a_{50} (50 — tai mažiausias skaičius, dviem būdais išreiškiamas kaip kvadratų suma: $50=1^2+7^2=5^2+5^2$).

Pažymėkime $a_1 = a$, tada:

$$a_1^2 + a_7^2 = a_5^2 + a_5^2, \qquad a^2 + a_7^2 = 2\left(a^2 + 4a^4\right)^2, \qquad \frac{1}{3^2} + a_7^2 = 2\left(\frac{1}{3^2} + \frac{4}{3^4}\right)^2.$$

Bet ši lygybė neįmanoma, nes:

$$\frac{1}{3^2} > 2\left(\frac{1}{3^2} + \frac{4}{3^4}\right)^2, \qquad \frac{1}{3} > \sqrt{2}\left(\frac{1}{9} + \frac{4}{81}\right), \qquad 27 > \sqrt{2} \cdot 13.$$

Vis dėlto klausimas, ar sprendiniai $f(n) = 0$, $f(n) = \frac{1}{2}$ ir $f(n) = n$ vieninteliai, lieka atviras. Tikėsimės, kad atsakyti į jį padės skaitytojai.

Autoriaus prierašas. Straipsnis jau buvo parengtas spausdinti, kai su juo susipažino pasaulio moksleivių ir studentų olimpiadų medalininkas, VU magistrantas Giedrius Alkauskas. Jis rėmėsi tapatybe $65^2 + 20^2 = 68^2 + 1^2$, iš kurios $a_{65}^2 + a_{20}^2 = a_{68}^2 + a_1^2$. Išsireiškęs čia figūruojančius sekos narius pirmuoju $a_1 = a$, jis gavo 16-ojo (!) laipsnio lygtį

$$\left(64a^8 + a^2\right)^2 + \left(32a^8 - 16a^6 + 2a^4 + 2a^2\right)^2 = \left(64a^8 + 4a^4\right)^2 + a^2.$$

Išskaidyti daugianarį, susidarantį perkėlus visus narius į vieną pusę, įmanoma, nes tai yra 8-ojo laipsnio a^2 atžvilgiu daugianaris, turintis „daug“ racionaliųjų šaknų (iš kurių tris jau iš anksto žinome). Gauname lygtį

$$a^2(a-1)(a+1)\left(4a^2+1\right)\left(2a^2+1\right)\left(2a-1\right)^2(2a+1)^2\left(8a^4-2a^2+1\right) = 0.$$

Aišku, kad ši lygtis turi tik 3 neneigiamus sprendinius: $a = 0$, $a = \frac{1}{2}$ ir $a = 1$.

Taigi (1) lygties sprendiniai $f\colon N \to \boldsymbol{R}_0$ yra tik funkcijos $f(n) = 0$, $f(n) = \frac{1}{2}$ ir $f(n) = n$, o olimpiadoje nagrinėtos sekos pirmas narys gali būti tik 1, $\frac{1}{2}$, 0, $-\frac{1}{2}$, -1.

1. J. Mačys, Susipažinkite: funkcinės lygtys, *Alfa plius omega*, **1**, 5–28, 1999.
2. G. Alkauskas, Funkcinės lygtys moksleivių matematikos olimpiadose, *Alfa plius omega*, **1**, 29–42, 1999.
3. А. Бейкер, *Введение в теорию чисел*, Вышэйшая школа, Минск, 1995, с. 61–62.