$\alpha + \omega$, 2003, Nr. 2, 93–94

„Kengūros“ pamokos Toliejoje

Audrius Posochovas

2003 metų rugpjūčio 17–27 dienomis vyko tarptautinė „Kengūros“ stovykla Toliejoje (Molėtų r.). Stovykloje vyko ir matematiniai užsiėmimai, kurių metu buvo nagrinėjami „Kengūros“ tipo uždaviniai. Vienas iš tų užsiėmimų organizatorių čia pateikia keletą tokių uždavinių su sprendimais.

Kengūra yra toks konkursas, kurio uždavinių atsakymai nurodyti, belieka iš jų rasti teisingą. Kartais vien perskaičius sąlygą galima atmesti kelis iš pateiktų variantų. Tokius konkursus gali laimėti gudrūs vaikai, kurie nėra susižavėję matematika ir visiškai nemoka įrodinėti.

1. *Du vagys pavogė uždarą grandinę iš $2m$ auksinių ir $2n$ sidabrinių grandžių. Norėdami ją pasidalyti kiekvienas tikisi gauti po lygiai auksinių ir po lygiai sidabrinių grandžių. Kiek mažiausiai pjūvių jiems reikės padaryti?*

Sprendimas. Kadangi neaišku, kaip šios grandys išsidėsčiusios, labai sunku sugalvoti būdą, kaip tokį uždavinį spręsti. Todėl pirmiausia pažiūrėkime, kas būtų, jei grandinę pjautume per pusę bet kaip. Tada turėtume dvi grandines, kuriose būtų po $(n+m)$ grandžių. Suskaičiuokime, kiek auksinių ir kiek sidabrinių grandžių yra kiekvienoje grandinės dalyje. Galimi du variantai: vienas labai geras — auksinių ir sidabrinių grandžių abiejose dalyse yra po lygiai, o kitas ne toks geras — vienoje iš tų dalių auksinių grandžių yra mažiau. O kas būtų, jei mes pjautume per vieną grandį į šoną? Tada galimi trys varinatai: kur trūko auksinių dalių, ten trūktų viena daugiau, viena mažiau arba auksinių grandžių liktų tiek pat. O jei toliau taip tęsime? Padarę $(n+m)$ žingsnių, gautume situaciją, priešingą pradinei, t. y. jei iš pradžių trūko auksinių grandžių, tai dabar trūksta tiek pat sidabrinių. Bet kiekvienu žingsniu auksinių dalių skaičius galėjo kisti tik per 1. Vadinasi, buvo toks žingsnis, kuriame auksinių dalių buvo lygiai m, tiek pat jų buvo ir kitoje grandinės dalyje. Vadinasi, kad ir kaip būtų sumaišyta grandinė, dviejų pjūvių pakaks.

Panašus į šį ir toks uždavinys:

2. *Yra dvi vienodai pripiltos stiklinės. Vienoje yra pienas, kitoje — sultys. (Gali būti ir kas nors skanesnio.) Iš pradžių šiek tiek pieno įpilkim į sultis, truputį pamaišykim (nebūtinai labai gerai) ir gauto mišinio įpilkim atgal į pieną taip, kad abiejose stiklinėse vėl būtų po lygiai skysčio. Ko daugiau — ar sultyse pieno, ar piene sulčių?*

Sprendimas. Tiek piene sulčių, tiek sultyse pieno bus po lygiai, kad ir kaip mes stengtumėmės maišyti ar nemaišyti. Kodėl? Nes vietoje trupučio sulčių yra pienas sulčių stiklinėje. Kur tas trūkumas sulčių? Piene. Visas ir nė trupučio mažiau ar daugiau.

3. *Iš pradžių kiekviename lentelės 3×3 laukelyje yra įrašyta po 0. Vienu žingsniu galime lentelės bet kurio kvadrato 2×2 visų laukelių skaičius padidinti 1. Ar galime gauti tokią lentelę?*

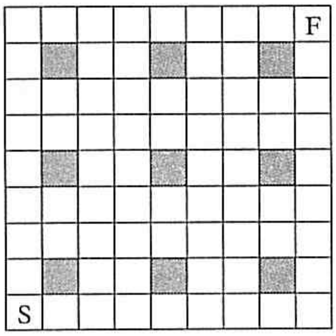
2	5	3
6	18	8
4	9	5

Sprendimas. Ne, nes aišku, kad kiekvienu ėjimu vienetu padidėja vieno kurio nors kampinio lentelės laukelio skaičius (bet tik vieno), taip pat vienetu padidėja ir centrinio laukelio skaičius. Todėl kampuose įrašytų skaičių suma turi būti lygi centre įrašytam skaičiui. O taip nėra.

4. *13 pilkų, 15 rudų ir 17 rausvų chameleonų gyvena Galvalaužių saloje. Jeigu dviejų skirtingų spalvų chameleonai susitinka, tai jie abu keičia spalvą į tą trečiąją. Ar gali kada nors jie tapti visi vienos spalvos?*

Sprendimas. Paverskime chameleonus ne tokiais egzotiškais skaičiais. Pilkus keiskime į 0, rudus į 1, rausvus į 2. Tada nors ir „susitikę“ skaičiai abu pasikeis į trečiąjį skaičių, bet galima pastebėti, kad jų sumos dalybos iš trijų liekana liks nepakitusi, todėl nepasikeis ir bendra visų skaičių sumos dalybos iš trijų liekana. Bet iš pradžių visos sumos dalybos iš trijų liekana yra 1. O jei visi taptų vienodi, tada ji būtų 0. Vadinasi, nei skaičiai, nei chameleonai nebus vienodi.

5. *Lentos 9×9 kai kurie langeliai yra nuspalvinti, kaip parodyta paveiksle.*



Keliais skirtingais būdais galima nueiti iš apatinio kairiojo langelio į viršutinį dešinįjį langelį, einant tik į viršų arba į dešinę. (Per nuspalvintus langelius eiti negalima.)

Sprendimas. Į bet kurį langelį galima patekti tik iš apačios arba iš kairės, todėl per tą langelį einančių kelių suma yra lygi kairiojo ir apatiniojo kaimyninio langelio kelių sumai. Žinome dar ir tai, kad į pradinį langelį galima patekti tik vienu keliu, tad nuo jo pradėdami galime surašyti kiekvieno langelio kelių skaičius:

1	1	8	39	39	114	339	339	678
1		7	31		75	225		339
1	2	7	24	41	75	150	225	339
1	1	5	17	17	34	751	75	114
1		4	12		17	41		39
1	2	4	8	12	17	24	31	39
1	1	2	4	41	5	7	7	8
1		1	2		1	2		1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

Darbo nėra labai daug, bet atsakymą iškart ir gauname — 678.

6. *Kas daugiau — 2002^{2003} ar 2003^{2002}?*

Sprendimas. Šio uždavinio atsakymą beveik visi galėjo teisingai nujausti, todėl jo tikslas buvo daugiau „išmušti iš vėžių“. Daugelis teisingai manė, nors nebuvo tikri, kad $2002^{2003} > 2003^{2002}$. Tad kaip iš tiesų būtų galima tai patikrinti? Kadangi $2002^{2003} = 2002^{2002} \times 2002$, tai abu skaičius galima padalyti iš 2002^{2002} ir lyginti skaičius 2002 ir $(2003/2002)^{2002}$. Bet

$$\left(\frac{2003}{2002}\right)^{2002} = \left(1 + \frac{1}{2002}\right)^{2002} =$$
$$= \sum_{i=0}^{2002} \binom{2002}{i} \left(\frac{1}{2002}\right)^i <$$
$$< \sum_{i=0}^{2002} \frac{2002^i}{i!} \left(\frac{1}{2002}\right)^i =$$
$$= \sum_{i=4}^{2002} \frac{1}{i!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} +$$
$$+ \sum_{i=4}^{2002} \frac{1}{i!} < 2\frac{2}{3} + \sum_{i=4}^{2002} 1 = 2000\frac{2}{3}.$$

Todėl $2002^{2003} > 2003^{2002}$.