$\alpha + \omega$, 2003, Nr. 2, 71–89

Olimpiadų ir konkursų uždaviniai

Lietuvoje kasmet vyksta daug įvairių matematinių olimpiadų ir konkursų, mūsų moksleiviai varžosi tarptautinėse matematinėse varžybose. Žurnalo puslapiuose – pastarųjų metų Lietuvos ir tarptautinių varžybų uždaviniai.

Komandinė matematikos olimpiada „Baltijos kelias 2002“
Tartu, 2002 11 02

1. Raskite visus realiuosius lygčių sistemos

$$\begin{cases} a^3 + 3ab^2 + 3ac^2 - 6abc = 1, \\ b^3 + 3ba^2 + 3bc^2 - 6abc = 1, \\ c^3 + 3ca^2 + 3cb^2 - 6abc = 1 \end{cases}$$

sprendinius.

2. Realieji skaičiai a, b, c, d yra tokie, kad:

$$a + b + c + d = -2, \qquad ab + ac + ad + bc + bd + cd = 0.$$

Įrodykite, kad bent vienas iš skaičių a, b, c, d yra ne didesnis už -1.

3. Raskite visas tokias realiųjų skaičių sekas $a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots$, kad visiems sveikiesiems skaičiams $m, n \geqslant 0$ būtų teisinga lygybė $a_{m^2+n^2} = a_m^2 + a_n^2$.

4. Tegul n yra natūralusis skaičius. Įrodykite, kad visiems neneigiamiems skaičiams $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tenkinantiems sąlygą $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$, teisinga lygybė

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(1 - x_i)^2 \geqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2.$$

5. Raskite visas tokias realiųjų skaičių a ir b poras (a, b), kad

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

6. Stačiakampėje lentoje $m \times n$ $(m, n \geqslant 2)$ žaidėjas žaidžia tokį žaidimą. Iš pradžių bokštas pastatomas kuriame nors laisvai pasirenkamame laukelyje. Kiekvienu ėjimu bokštą galima pastumti per bet kiek laukelių vertikaliai arba horizontaliai. Kiekvienas ėjimas turi būti daromas kryptimi, su ankstesne sudarančia 90° kampą pagal laikrodžio rodyklę (pavyzdžiui, po ėjimo į kairę, kitas ėjimas turi būti padarytas aukštyn, po to į dešinę ir t. t.). Su kuriomis m ir n reikšmėmis įmanoma bokštu aplankyti kiekvieną lentos laukelį lygiai vieną kartą ir grįžti į pradinį laukelį? (Bokštas aplanko tik tuos laukelius, kuriuose jis sustoja, bet ne tuos, kuriuos jis tik peršoka.)

7. Plokštumoje braižome n stačiakampių. Jie padalija plokštumą į sritis (viena iš sričių yra begalinė). Nustatykite didžiausią galimų tokių sričių skaičių.

8. Tegul aibę P sudaro n ($n \geqslant 3$) plokštumos taškų, iš kurių jokie trys nėra vienoje tiesėje. Keliais būdais galima sudaryti aibę T, susidedančią iš C_{n-1}^2 trikampių, kurių visų viršūnės yra aibės P taškuose, o kiekvienas iš aibės T trikampių turi kraštinę, kuri nėra jokio kito aibės T trikampio kraštinė?

9. Du magai rodo tokį triuką. Pirmasis magas išeina iš kambario. Antrasis magas ima malką iš 100 kortų, pažymėtų skaičiais $1, 2, \ldots, 100$, ir prašo trijų žiūrovų vieną po kito pasiimti po kortą. Antrasis magas mato, kokią kortą pasirinko kiekvienas iš žiūrovų. Tada jis prideda vieną kortą iš likusių malkoje. Žiūrovai išmaišo tas 4 kortas, pakviečia pirmąjį magą ir paduoda jam. Pirmasis magas žiūri į tas 4 kortas ir „spėja“, kokią kortą pasirinko pirmasis žiūrovas, kokią — antrasis ir kokią — trečiasis. Įrodykite, kad magai visada gali atlikti šį triuką.

10. Tegul N yra natūralusis skaičius. Du žaidėjai žaidžia tokį žaidimą. Pirmasis žaidėjas sudaro sąrašą nebūtinai skirtingų skaičių, kurių kiekvienas yra ne didesnis už 25 ir kurių suma yra ne mažesnė kaip 200. Antrasis žaidėjas laimi, jeigu jis gali kai kuriuos iš tų skaičių išsirinkti taip, kad jų suma S tenkintų sąlygą $200-N \leqslant S \leqslant 200+N$. Kokia yra mažiausia N reikšmė, kad antrasis žaidėjas visada galėtų laimėti?

11. Tegul n yra natūralusis skaičius. Imkime n tokių plokštumos taškų, kad visi atstumai tarp dviejų taškų būtų skirtingi ir jokie trys taškai nebūtų vienoje tiesėje. Paėmę vieną tašką, jį atkarpomis jungiame su dviem arčiausiai jo esančiais taškais. Po to imame kitą tašką ir darome tą patį ir t. t. (jeigu paimtas taškas jau sujungtas kitomis atkarpomis, tai jos nenutrinamos, bet jeigu reikalinga atkarpa jau nubrėžta, tai ji nekartojama). Įrodykite, kad nėra tokio taško, kuris atkarpomis būtų sujungtas su daugiau kaip 11 taškų.

12. Keturių skirtingų plokštumos taškų aibė S yra tokia, kad paėmus bet kurį tašką $X \in S$ likusieji taškai raidėmis Y, Z ir W gali būti pažymėti taip, kad $|XY| = |XZ| + |XW|$. Įrodykite, jog visi tie keturi taškai yra vienoje tiesėje.

13. ABC yra toks smailusis trikampis, kurio $\angle BAC > \angle BCA$, o D yra toks kraštinės AC taškas, kad $|AB| = |BD|$. Apie trikampį ABC apibrėžtame apskritime paimame tokį tašką F, kad tiesė FD būtų statmena kraštinei BC, o taškai F ir B būtų skirtingose tiesės AC pusėse. Įrodykite, kad FB yra statmena kraštinei AC.

14. L, M ir N yra tokie trikampio ABC kraštinių AC, AB ir BC taškai, kad BL yra trikampio ABC pusiaukampinė, o atkarpos AN, BL ir CM turi bendrą tašką. Įrodykite, kad jei $\angle ALB = \angle MNB$, tai $\angle LNM = 90°$.

15. Voras tupi ant kubo paviršiaus. Musė taip pat turi atsitūpti ant kubo paviršiaus, bet ji nori maksimizuoti trumpiausią kelią iki voro kubo paviršiumi. Ar visada musei geriausiai pasirinkti tašką, simetrišką vorui kubo centro atžvilgiu?

16. Raskite visas tokias neneigiamas sveikąsias m reikšmes, kad skaičius $a_m = (2^{2m+1})^2 + 1$ turėtų ne daugiau kaip du skirtingus pirminius daliklius.

17. Įrodykite, kad liekanos, gautos dalijant kiekvieną sekos $C_{2002}^{2002}, C_{2003}^{2002}, C_{2004}^{2002}, \ldots$ narį iš 2002, sudaro periodinę seką.

18. Raskite visus tokius sveikuosius skaičius $n > 1$, kad kiekvienas pirminis skaičiaus $(n^6 - 1)$ daliklis būtų ir skaičiaus $(n^3 - 1)(n^2 - 1)$ daliklis.

19. Tegul n yra natūralusis skaičius. Įrodykite, kad lygtis

$$x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3n$$

neturi teigiamų racionaliųjų sprendinių.

20. Ar egzistuoja begalinė aritmetinė progresija su skirtumu, nelygiu 0, kad kiekvieną jos narį būtų galima užrašyti kaip a^b, kur a ir b yra natūralieji skaičiai ir $b \geqslant 2$?

XVII Lietuvos komandinė matematikos olimpiada
Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, 2002 09 28

1. Išspręskite lygtį

$$x^{12}-x^9+x^4-x+1=0.$$

2. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^2+y^2=2, \\ x^3+y^3=2. \end{cases}$$

3. Raskite visus teigiamųjų skaičių ketvertus (x, y, z, t), tenkinančius lygčių sistemą

$$\begin{cases} x+y-zt=0, \\ xy-z-t=0, \\ xyzt=16. \end{cases}$$

4. Realieji skaičiai x, y, z, t tenkina nelygybes $x+y+z+t<0$, $xy+xz+xt+yz+yt+zt>0$, $xyz+xyt+xzt+yzt<0$ ir $xyzt>0$. Įrodykite, kad $x, y, z, t<0$.

5. Įrodykite, kad bent vienas iš skaičių $x-xy$, $y-yz$, $z-xz$ ne didesnis už $\frac{1}{4}$, kai $x, y, z>0$.

6. Realiojo skaičiaus $x \neq 0$ atvirkštiniu yra vadinamas skaičius $\frac{1}{x}$. Yra žinoma, kad keturių nenulinių skaičių suma ir jų atvirkštinių suma yra lygios nuliui. Įrodykite, kad tarp tų keturių skaičių yra du, kurių suma lygi nuliui.

7. Raskite mažiausią funkcijos $f(x)=-2\cos(3x)\sin(6x)$ reikšmę.

8. Įrodykite, kad $10^n+45n-1$ dalijasi iš 27, kai n — natūralusis skaičius.

9. Įrodykite, kad egzistuoja toks natūralusis skaičius n, kad skaičiaus $2n$ dešimtainėje išraiškoje yra ne mažiau kaip 2002 iš eilės einantys nuliai.

10. Raskite mažiausią natūralųjį skaičių, kurio pusė yra sveikojo skaičiaus kvadratas, trečdalis yra sveikojo skaičiaus kubas, o penktadalis yra sveikojo skaičiaus penktasis laipsnis.

11. Tegul $a_1=1$, $a_2=2$, $a_{n+1}=\frac{a_n a_{n-1}+1}{a_{n-1}}$, $n=2, 3, \ldots$. Įrodykite, kad $a_n>\sqrt{2n}$, kai $n \geqslant 3$.

12. Ar egzistuoja tokie sveikieji skaičiai a ir b, kad skaičiai

$$\left(a+\frac{1}{2}\right)^n+\left(b+\frac{1}{2}\right)^n$$

taip pat būtų sveikieji su kiekvienu natūraliuoju n?

13. Ar egzistuoja toks šimtojo laipsnio daugianaris $p(x)$ su realiaisiais koeficientais, kad

$$p(0)>|p(1)|+|p(2)|+\cdots+|p(2001)|+|p(2002)|?$$

14. Raskite visas funkcijas $f(x)$, apibrėžtas su kiekvienu realiuoju x ir tenkinančias sąlygas:

$$f(f(x)) = x, \qquad f(1 + f(x)) = 1 - x.$$

15. Raskite visas funkcijas $f(x)$, apibrėžtas su kiekvienu realiuoju x ir tenkinančias sąlygą

$$f(x^2 + y^2 - 2xy) = f^2(x) + y^2 - 2xf(y).$$

16. Per metus mokyklos bibliotekoje apsilankė 410 mokinių. Jie visi kartu paėmė 5081 knygą. Ar galima tvirtinti, kad atsiras 18 mokinių, kurie kartu paėmė ne mažiau kaip 224 knygas?

17. Šachmatų lentoje 8×8 pastatomas karalius, kuriam leidžiaina daryti tik tokius ėjimus: arba per vieną langelį į kairę, arba per vieną langelį į apačią, arba per vieną langelį įstrižaine aukštyn-dešinėn. Ar gali jis 64 ėjimais apeiti visą lentą taip, kad kiekviename langelyje apsilankytų po vieną kartą ir sugrįžtų į pradinį langelį?

18. Kokią didžiausią reikšmę gali įgyti į vienetinį apskritimą įbrėžto keturkampio kraštinių sandauga?

19. Į smailųjį trikampį ABC įbrėžtas kvadratas, kurio kraštinė yra lygi a. Dvi kvadrato viršūnės priklauso kraštinei BC, kitos dvi — AB ir AC. Analogiškai, tegul b ir c yra kraštinės dar dviejų kvadratų, kurių po dvi viršūnes priklauso atitinkamai AC ir AB, o kitos dvi — atitinkamai AB, BC ir AC, BC. Įrodykite, kad

$$\frac{BC}{a} + \frac{AC}{b} + \frac{AB}{c} > 5 + \sqrt{2}.$$

20. Plokštumoje nubrėžti penki apskritimai. Duota, kad bet kokie keturi iš jų turi bent vieną bendrą tašką. Ar visada tie penki apskritimai turi bent vieną bendrą tašką?

IV individualioji Raseinių krašto olimpiada prof. Jono Kubiliaus taurei laimėti
Raseiniai, 2003 12 22

1. Natūralusis skaičius užrašomas vienais nuliais ir vienetais ir dalijasi iš 27.
a) Nurodykite bent vieną tokį skaičių.
b) Raskite patį mažiausią tokį skaičių.

2. Raseinių Magdutė sugalvojo 12 (nebūtinai skirtingų) sveikųjų skaičių ir sudėjo juos po 11 visais galimais būdais. Ji gavo skaičius 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99 ir 100.
Kokius skaičius buvo sugalvojusi Magdutė?

3. Salomėja turi Maironio raštų dešimttomį. Keliais būdais ji galėtų paimti 4 tomus taip, kad tarp paimtųjų 4 tomų jokie 2 tomai neitų iš eilės?

4. Duota lygtis $10^n - 3^m = 7$.
a) Raskite bent vieną tos lygties sprendinį natūraliaisiais skaičiais m ir n.
b) Įrodykite, kad kitų sprendinių natūraliaisiais skaičiais m ir n nėra.

5. Kai trikampyje ABC buvo išvestos pusiaukampinės AD ir BE, tai paaiškėjo, kad kampas ADC lygus ir kampui AEB, ir kampui BAC.
Raskite trikampio ABC kampus.

IV komandinė Raseinių krašto olimpiada prof. Jono Kubiliaus taurei laimėti
Raseiniai, 2003 12 22

1. Natūraliojo skaičiaus skaitmenų suma nesidalija iš 7. Kiek daugiausiai tokių skaičių gali eiti iš eilės?
   A 6 **B** 7 **C** 10 **D** 12 **E** 14
2. Kiek sprendinių sveikaisiais skaičiais turi lygtis $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{7}$?
   A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4 **E** 5
3. 416 keleivių pervežti iš Ariogalos į Raseinius gali būti paimtos 7, 21 ir 31 vietų mašinos. Kokį mažiausią mašinų skaičių reikia paimti, kad jose neliktų tuščių vietų?
   A 13 **B** 16 **C** 18 **D** 20 **E** 21
4. Raseinių Magdutė sugalvojo 7 nebūtinai skirtingus sveikuosius skaičius ir sudėjo juos visais galimais būdais po 6. Ji gavo tokias sumas: 29, 30, 31, 32, 33 ir 34. Koks yra didžiausias iš Magdutės sugalvotų skaičių?
   A 6 **B** 7 **C** 8 **D** 9 **E** 10
5. Ant atkarpos, kurios ilgis yra $a+b$, į vieną pusę nubrėžti du besiliečiantys kvadratai, kurių kraštinės yra a ir b. Kvadratų centrus O_1 ir O_2 sujungiame atkarpomis su pradinės atkarpos vidurio tašku P. Kiek laipsnių turi kampas O_1PO_2?
   A 60 **B** 75 **C** 90 **D** 100 **E** 120
6. Visų triženklių skaičių, kurie baigiasi 7 ir dalijasi iš 7, skaičių pažymėkime n, o visų triženklių skaičių, kurie baigiasi 8 ir dalijasi iš 8, skaičių pažymėkime m. Tada skirtumas $n-m$ lygus:
   A -10 **B** -9 **C** 0 **D** 2 **E** 3
7. Kiek yra keturženklių skaičių, kurių visi skaitmenys skirtingi?
   A 5040 **B** 5000 **C** 4536 **D** 2003 **E** 2004
8. Skaičius A yra skaičiaus 27 kartotinis, užrašomas tik nuliais ir vienetais. Kiek mažiausiai skaitmenų A gali turėti?
   A 3 **B** 5 **C** 9 **D** 10 **E** 27
9. Kai trikampyje ABC buvo išvestos pusiaukampinės AD ir BE, tai paaiškėjo, kad kampas ADC lygus ir kampui AEB, ir kampui BAC.
   Raskite mažiausio ir didžiausio trikampio ABC kampų skirtumą.
   A 30° **B** 40° **C** 45° **D** 60° **E** Nustatyti neįmanoma
10. Į kvadrato 4×4 langelius įrašome po kartą visus skaičius nuo 1 iki 16. Kvadratą vadinsime *antimagišku*, jeigu visų eilučių, visų stulpelių ir abiejų „ilgųjų“ įstrižainių langelių skaičių sumos duoda 10 iš eilės einančių skaičių. Paveikslėlyje

4	5	7	14
6	13	3	*
11	12	9	
10			

parodytas toks nevisiškai užpildytas antimagiškas kvadratas. Kai jis bus visiškai užpildytas, koks skaičius stovės žvaigždutės vietoje?
A 1 **B** 2 **C** 8 **D** 15 **E** 16

V komandinė Pasvalio krašto olimpiada prof. Broniaus Grigelionio taurei laimėti
Jaunesniųjų klasių grupė
Pasvalys, 2003 11 21

1. Šeima susideda iš trijų asmenų: tėvo, motinos ir sūnaus. Šiuo metu jų amžių suma lygi 65 metams. Prieš 9 metus ši suma buvo lygi 40 metų. Prieš 4 metus tėvas buvo 9 kartus vyresnis už sūnų. Kiek metų turi tėvas, motina ir sūnus?

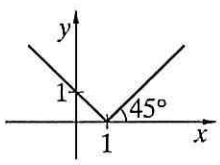
2. Suprastinkite reiškinį

$$\frac{x^4+x^2+1}{x^2+x+1}.$$

3. Tegu a, b ir c yra tokie skaičiai, jog $a+b+c=0$. Įrodykite, kad $ab+bc+ac \leqslant 0$.

4. Ar egzistuoja trikampis, kurio aukštinės lygios 1, 2 ir 3?

5. Naudodami absoliučiojo didumo ženklą, užrašykite funkciją $y=f(x)$, kurios grafikas pavaizduotas paveikslėlyje.



6. Pirmu žingsniu intervalas [0; 1] dalijamas į tris lygias dalis, o vidurinė atkarpa $(\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$ išmetama. Antru žingsniu kiekviena iš likusių atkarpų dalijama į tris lygias dalis ir vėl išmetamos vidurinės dalys, ir t. t. Kokia po n žingsnių likusių atkarpų ilgių suma?

7. Pu yra kinų ilgio vienetas, o mu yra ploto vienetas. Stačiakampio lauko plotis 21 pu, o plotas $(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6})$ mu. Žinodami, kad 1 pu = 2 žingsniams, 1 mu = 240 pu^2, raskite lauko ilgį žingsniais.

8. Viena lygiagretainio kraštinė buvo padidinta 20%, o kita — sumažinta 20%. Keliais procentais pakito lygiagretainio plotas?

9. Kiek yra natūraliųjų skaičių n ($1 \leqslant n \leqslant 500$), nesidalijančių nei iš 2, nei iš 3?

10. Sakysime, kad n-tieji kalendoriniai metai yra *laimingi*, jeigu skaičius $1^n+2^n+3^n+4^n$ dalijasi be liekanos iš 5. Ar yra laimingi 2003 ir 2004 metai?

Vyresniųjų klasių grupė

1. Lygiagretainio $ABCD$ taškas E yra kraštinės BC vidurio taškas, o F — kraštinės CD vidurio taškas. Įrodykite, kad tiesės AE ir AF dalija įstrižainę BD į tris lygias dalis.

2. Žinoma, kad daugianarį $p(x)$ dalijant iš $x+1$ gaunama liekana 1, o dalijant iš $x-1$ liekana yra 3. Kokia liekana bus dalijant $p(x)$ iš x^2-1?

3. Įrodykite, kad skaičius 2^k+1 nesidalija iš 7 nė su vienu natūraliuoju skaičiumi k.

4. Kiekvienas lentelės $m \times n$ skaičius yra lygus kaimyninių skaičių aritmetiniam vidurkiui (keturių, jei skaičius yra lentelės viduje, trijų, jei jis yra lentelės krašte, ir dviejų, jei skaičius yra lentelės kampe). Įrodykite, kad visi lentelėje esantys skaičiai yra lygūs.

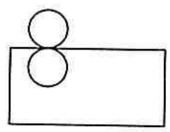
5. Įrodykite, kad iš visų vienodo perimetro P trikampių didžiausią plotą turi lygiakraštis trikampis.

6. Šeima susideda iš trijų asmenų: tėvo, motinos ir sūnaus. Šiuo metu jų amžių suma lygi 65 metams. Prieš 9 metus ši suma buvo lygi 40 metų. Prieš 4 metus tėvas buvo 9 kartus vyresnis už sūnų. Kiek metų turi tėvas, motina ir sūnus?

7. Raskite sumą $S = f(\frac{1}{2003}) + f(\frac{2}{2003}) + \cdots + f(\frac{2002}{2003})$, jei $f(x) = \frac{9^x}{3+9^x}$.
8. Sakykime, kad $a * b = a^b$. Raskite $\frac{2*(2*(2*2))}{((2*2)*2)*2}$.
9. Sakysime, kad n-tieji kalendoriniai metai yra *laimingi*, jeigu skaičius $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ dalijasi be liekanos iš 5. Ar yra laimingi 2003 ir 2004 metai?
10. Ar egzistuoja trikampis, kurio aukštinės lygios 1, 2 ir 3?

III komandinė Rietavo olimpiada mokytojo Kazio Šikšniaus taurei laimėti
Rietavas, 2004 01 24
Užduotis jaunesniųjų klasių moksleiviams

1. Iš trikampio ABC viršūnės B išvestos aukštinė BD ir pusiaukraštinė BE. Jos kampą B dalija į tris lygius kampus. Raskite trikampio ABC kampus.
2. Du apskritimai, kurių ilgiai lygūs 0,5 m, rieda stačiakampio viršūnėmis — vienas išore, o kitas — vidumi. Stačiakampio ilgis — 2 m, plotis — 1 m. Kiek apsisukimų padarys kiekvienas apskritimas, apriedėjęs visą stačiakampį?



3. Duotas aritmetinis reiškinys $4 \cdot 12 + 18 : 6 + 3$.
   a) Skliaustelius sudėliokite taip, kad jis būtų lygus 50.
   b) Kaip reikia sudėlioti skliaustelius, kad reiškinys įgytų mažiausią galimą reikšmę?
   c) Kaip reikia sudėlioti skliaustelius, kad reiškinys įgytų didžiausią galimą reikšmę?
4. Ratu surašyti 20 skaičių. Kiekvienas iš jų lygus abiejų savo kaimynų sumai. Apskaičiuokite visų tų dvidešimties skaičių sumą.
5. Raskite mažiausią natūralųjį skaičių, kuris nubraukus jo pirmąjį skaitmenį sumažėja 57 kartus.
6. Milijono natūraliųjų skaičių sandauga lygi milijonui. Kokią didžiausią reikšmę gali įgyti šių skaičių suma?
7. Į kvadrato 5×5 kiekvieną langelį įrašyti skaičiai 0 arba 1 taip, kad bet kurio 2×2 kvadratėlio trys skaičiai būtų vienodi. Kokią didžiausią reikšmę gali įgyti visos 5×5 lentelės skaičių suma?
8. Kelionė iš uosto A į uostą B trunka 15 parų. Kiekvieną dieną 12 valandą iš uosto A į uostą B ir iš B į A išplaukia garlaivis. Kiek iš uosto A išplaukęs garlaivis, sutiks garlaivių, plaukiančių iš B į A?
9. Berniukas turi tiek pat seserų, kiek ir brolių. Jo sesuo turi du kartus daugiau brolių negu seserų. Kiek šioje šeimoje yra mergaičių ir kiek berniukų?
10. Laikrodžio rodyklės rodo pirmą valandą dienos. Raskite artimiausią laiko momentą, kai rodyklės sutaps.

Užduotis vyresniųjų klasių moksleiviams

1. Ar yra toks natūralusis skaičius n, su kuriuo skaičiaus n^{2004} paskutiniai keturi skaitmenys yra 2004?
2. Koks triženklis skaičius yra lygus jo vienetų skaitmens kubui?
3. Natūralieji skaičiai nuo 1 iki 99999 iš eilės surašyti ilgoje popieriaus juostoje. Gautas skaičius yra 1234567891011121314. . .999979999899999. Raskite šio skaičiaus skaitmenų sumą.

4. Apskaičiuokite sumą

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}.$$

5. Ar galima kvadratą padalyti į tris keturkampius taip, kad į kiekvieną iš jų būtų galima įbrėžti apskritimą (apskritimų spinduliai nebūtinai vienodi)?

6. Trikampio aukštinių ilgiai yra 3 cm, 4 cm ir 5 cm. Koks šis trikampis — smailusis, statusis ar bukasis?

7. Be skaičiuoklio apskaičiuokite $\log_2(\operatorname{tg} 1^\circ)+\log_2(\operatorname{tg} 2^\circ)+\cdots+\log_2(\operatorname{tg} 89^\circ)$.

8. Tegu $x>0$, $y>0$. Mažiausią iš trijų skaičių x, $y+\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ pažymėkime a, t.y. $a=\min(x, y+\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$. Kokia gali būti didžiausia skaičiaus a reikšmė?

9. Raskite visas realiųjų skaičių aibėje apibrėžtas funkcijas $f(x)$, tenkinančias lygybę $x(f(x)+f(-x)+4)+2f(x)+2=0$.

10. Jonas ir Petras gyvena viename name. Kiekvienoje laiptinėje kiekviename aukšte yra po 4 butus. Jonas gyvena penktame aukšte 83 bute, o Petras — trečiame aukšte 169 bute. Kelių aukštų tas namas?

Rostropovičiaus gabuolių fondo atrankos uždaviniai
V–VII klasės

1. Kiek natūraliųjų sprendinių (x, y) turi lygtis $x+y+xy=23$?
A 4 **B** 5 **C** 6 **D** 8 **E** 10

2. Natūralusis skaičius baigiasi 13, dalijasi iš 13, jo skaitmenų suma lygi 13 ir jis yra pats mažiausias iš visų tokių skaičių. To skaičiaus šimtų skaitmuo yra
A 1 **B** 3 **C** 5 **D** 6 **E** 7

3. Į kiek daugiausiai dalių gali padalyti plokštumą 4 tiesės?
A 8 **B** 9 **C** 10 **D** 11 **E** 12

4. Natūralusis skaičius yra užrašomas vien tik nuliais ir vienetais ir dalijasi be liekanos iš 9. Ne visi jo skaitmenys yra vienodi. Kiek skaitmenų turi mažiausias toks skaičius?
A 6 **B** 9 **C** 10 **D** 11 **E** 12

5. Natūralusis skaičius vadinamas palindromu, jeigu jis yra toks pat ar skaitytum jį iš dešinės į kairę, ar iš kairės į dešinę. Kiek yra tokių 4-ženklių palindromų, kurie dalijasi iš 99?
A 5 **B** 7 **C** 8 **D** 9 **E** 10

6. Natūralųjį skaičių vadinsime *antikvariniu*, jeigu jo skaitmenų suma nesidalija iš keturių (pavyzdžiui, 111 yra antikvarinis skaičius). Kiek daugiausiai antikvarinių skaičių gali eiti iš eilės?
A 3 **B** 4 **C** 7 **D** 6 **E** 9

7. Trupmena $\frac{m}{n}$ yra didesnė už $\frac{1}{10}$, bet mažesnė už $\frac{1}{9}$ (m ir n yra sveikieji teigiami skaičiai) ir tokia, kad jos skaitiklio m ir vardiklio n suma $m+n$ yra pati mažiausia ir lygi:
A 19 **B** 21 **C** 20 **D** 31 **E** 32

8. Keliais būdais (įskaitant ir pradinį) galima perstatyti pavardės ROSTROPOVIČIUS balses, kad maestro pavardė liktų tokia pat?
A 6 **B** 3 **C** 5 **D** 12 **E** 2

9. Prie natūraliojo skaičiaus n pridėjome jo skaitmenų sumą ir gavome 2004. Kiek yra tokių skirtingų natūraliųjų skaičių?
A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 6 **E** Tokių natūraliųjų skaičių nėra

10. Elektroninis laikrodis rodo laiką nuo 00:00:00 iki 23:59:59. Kiek sekundžių per parą laikrodžio rodomame laike yra lygiai trys septynetai?
A 21 **B** 36 **C** 60 **D** 72 **E** 120

VIII–X klasės

1. Kiek sprendinių sveikaisiais skaičiais (x, y) turi lygtis $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}$?
A 14 **B** 15 **C** 28 **D** 29 **E** 30

2. Natūralusis skaičius baigiasi 11, dalijasi iš 11, turi 11 skaitmenų ir yra pats mažiausias iš visų tokių skaičių. Tada to skaičiaus tūkstančių (ketvirtas iš dešinės) skaitmuo yra:
A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 5 **E** 9

3. Į kiek daugiausiai dalių gali padalyti plokštumą 10 tiesių?
A 20 **B** 45 **C** 54 **D** 56 **E** 1024

4. Natūralusis skaičius, užrašomas vien tik nuliais ir vienetais, dalijasi be liekanos iš 54. Kiek skaitmenų turi mažiausias toks skaičius?
A 6 **B** 9 **C** 10 **D** 11 **E** 12

5. Kiek yra neneigiamų sveikųjų skaičių x ir y porų $(x; y)$, tenkinančių nelygybę $x + y = 2004$?
A 2004 **B** 2 007 006 **C** 2 009 010 **D** 2 009 010 **E** 2 011 015

6. Trupmena $\frac{m}{n}$ yra didesnė už $\frac{1}{100}$, bet mažesnė už $\frac{1}{99}$ (m ir n yra sveikieji teigiami skaičiai) ir tokia, kad jos skaitiklio m ir vardiklio n suma $m + n$ yra pati mažiausia ir lygi:
A 199 **B** 201 **C** 301 **D** 302 **E** 303

7. Ant didžiulio stalo bet kokiomis krūvelėmis guli 1000 vieno cento monetų. Yra žinoma, kad jungdami tas centų krūveles į didesnes, galėtume sudaryti arba 8 superkrūveles po 125 centus, arba, jungdami kitaip, 5 superkrūveles po 200 centų. Kiek daugiausiai vieno cento monetų gali pasitaikyti mažiausioje (arba vienoje iš jų, jeigu tokių mažiausių krūvelių pasitaikytų ne viena) centų krūvelėje?
A 25 **B** 40 **C** 50 **D** 20 **E** 60

8. Keliais būdais (įskaitant ir pradinį) galima perstatyti atskirai vardo MSTISLAVAS ir atskirai pavardės ROSTROPOVIČIUS raides, kad MSTISLAVAS ROSTROPOVIČIUS būtų skaitoma vis taip pat?
A 288 **B** 576 **C** 764 **D** 336 **E** 960

9. Trikampio ABC kraštinės $AB = 7$, $BC = 5$ ir $AC = 3$. Kraštinėje AB paimti tokie taškai P ir Q, kad $AP = PC$ ir $CQ = QB$. Tada kampas CQP plius kampas CPQ minus kampas QCP lygu:
A 30° **B** 45° **C** 60° **D** 75° **E** 90°

10. Trikampio ABC kraštinėje AB pažymėtas toks taškas K, kad $AK = 3KB$, kraštinėje BC — toks taškas M, kad kampas BKM yra dvigubai didesnis už kampą BAC, o atkarpos KM, MC ir BK yra lygios. Tada trikampio ABC kampų didumai laipsniais yra:
A 60, 60, 60 **B** 75, 60, 45 **C** 90, 60, 30 **D** 105, 45, 30 **E** 90, 45, 45

XI–XII klasės

1. Kiek yra sveikųjų skaičių x ir y porų $(x; y)$, tenkinančių nelygybių sistemą

$$\begin{cases} 2x \geqslant 3y, \\ 3x \geqslant 4y, \\ 5x - 7y \leqslant 20? \end{cases}$$

A 1 **B** 12 **C** 210 **D** 231 **E** 400

2. Kokį mažiausią skaičių šaškių, kurių skersmuo yra lygus 1,5, užtenka padėti ant 7×7 langelių lentos (langelio kraštinės ilgis yra 1) taip, kad bent vienas kiekvieno langelio vidaus taškas būtų uždengtas kuria nors iš padėtųjų šaškių?
A 8 **B** 9 **C** 10 **D** 11 **E** 7

3. Natūralusis skaičius užrašomas vienais nuliais ir vienetais ir dalijasi be liekanos iš 54. Kiek skaitmenų turi mažiausias toks skaičius?
A 9 **B** 10 **C** 11 **D** 27 **E** 28

4. Kiek sprendinių sveikaisiais skaičiais (x, y) turi lygtis $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2003}$?
A 4 **B** 5 **C** 6 **D** 10 **E** 12

5. Natūralusis skaičius yra vadinamas palindromu, jeigu jis yra toks pat, ar skaitytum jį iš dešinės į kairę, ar iš kairės į dešinę. Kiek yra 7-ženklių palindromų, kurie dalijasi iš 9?
A 810 **B** 900 **C** 990 **D** 1000 **E** 1331

6. Keliais būdais (įskaitant ir pradinį) galima perstatyti atskirai vardo MSTISLAVAS ir atskirai pavardės ROSTROPOVIČIUS raides, kad visą laiką liktų MSTISLAVAS ROSTROPOVIČIUS?
A 288 **B** 576 **C** 764 **D** 336 **E** 960

7. Ant stalo bet kokio didumo krūvelėmis guli milijonas 1 euro vertės monetų. Yra žinoma, kad jungdami tas krūveles į didesnes, galėtume sudaryti arba 8 superkrūvas po 125 000 eurų kiekviena, arba 5 superkrūvas po 200 000 eurų. Kiek daugiausiai eurų gali pasitaikyti mažiausioje pinigų krūvelėje (arba vienoje iš jų, jeigu tokių mažiausių krūvelių būtų ne viena)?
A 10 000 **B** 12 500 **C** 25 000 **D** 50 000 **E** 62 500

8. Trikampyje ABC $AB = 7$, $BC = 5$ ir $AC = 3$. Kraštinėje AB paimti tokie taškai P ir Q, kad $AP = PC$ ir $CQ = QB$. Tada $\angle CQP + \angle CPQ - \angle QCP$ laipsniais lygu:
A 30 **B** 45 **C** 60 **D** 75 **E** 90

9. Trikampio ABC kraštinėje AB pažymėtas toks taškas K, kad $AK = 3KB$, kraštinėje BC — toks taškas M, kad kampas BKM yra dvigubai didesnis už kampą BAC, o atkarpos KM, MC ir BK yra lygios. Raskite trikampio ABC kampų didumus laipsniais.
A 60, 60, 60 **B** 75, 60, 45 **C** 90, 45, 45 **D** 105, 45, 30 **E** 90, 60, 30

10. 3×3 lentelėje iš eilės surašyti visi skaičiai nuo 1 iki 9.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Leidžiama paimti bet kurį 2×2 kvadratą ir prie abiejų vienos kurios jo įstrižainės skaičių pridėti po 1, o iš abiejų kitos jo įstrižainės skaičių po 1 atimti. Šį veiksmą galime kartoti kiek norime. Kiek daugiausiai vienodų skaičių galima gauti tokioje lentelėje?
A 4 **B** 5 **C** 6 **D** 7 **E** 8

Minsko matematikos olimpiada, 2004 01 11
VIII klasė

1. Penki natūralieji skaičiai pasižymi tokia savybe: jeigu imtume visus galimus trijų skaičių rinkinius ir suskaičiuotume kiekvieno trejeto skaičių sumą, tai gautume lygiai 7 skirtingus rezultatus, o jeigu tą patį su visais galimais skaičių ketvertais — tai gautume 5 skirtingus rezultatus. Įrodykite, kad visų tų penkių skaičių suma dalijasi iš 5.

2. Skaitmenys 3, 4, 5 ir 6 rašomi į eilę taip, kad tarp bet kurių trijų iš eilės einančių skaitmenų būtų ne daugiau kaip vienas skaitmuo 3, tarp bet kurių keturių iš eilės einančių skaičių — ne daugiau kaip vienas skaitmuo 4, tarp bet kurių penkių iš eilės einančių skaičių — ne daugiau kaip vienas skaitmuo 5, tarp bet kurių šešių iš eilės einančių skaitmenų — ne daugiau kaip vienas skaitmuo 6. Kiek daugiausiai skaitmenų galima parašyti laikantis šitos sąlygos?

3. Natūralieji skaičiai a, b ir c tenkina lygybę $a^2+b^2+2bc = 8c^2$. Įrodykite, kad a yra sudėtinis skaičius.

4. Kvadrato $ABCD$ viduje pažymėtas įstrižainei BD nepriklausantis taškas K, kraštinėje CD pažymėtas taškas M, $MK = KD$, o atkarpos BK ir KM yra statmenos. Raskite kampo KBM didumą.

5. Stačiakampis languoto popieriaus lapas $m \times n$ buvo sukarpytas į vienodus kvadratus ir į vienodus lygiašonius stačiuosius trikampius. Kvadrato įstrižainės ir trikampio statinio ilgis du kartus didesnis už langelio kraštinę. Karpoma buvo arba langelių kraštinėmis, arba langelių įstrižainėmis. Įrodykite, kad jeigu visus gautuosius kvadratus pakeistume minėtais trikampiais, tai iš gautojo figūrėlių rinkinio vėl galėtume sudėti pradinį stačiakampį lapą.

IX klasė

1. Į lygiakraštį trikampį ABC, kurio kraštinės ilgis lygus 1, įbrėžti du kvadratai $MNKL$ ir $RKPT$ taip, kad taškai M, L ir R priklauso kraštinei AC (taškų išsidėstymo eilė yra tokia: A, M, L, R ir C), o taškai P ir T — kraštinei BC (taškų išsidėstymo eilė yra B, P, T ir C), taškas N priklauso kraštinei AB. Raskite tų kvadratų kraštinių ilgius.

2. Raskite visus natūraliųjų skaičių trejetus (a, b, c), kad $a^2+b^2-33c^2 = 8bc$, o a yra pirminis skaičius.

3. Ar galima skaičių 2004 užrašyti kelių skirtingų dėmenų suma taip, kad tarp visų galimų porių sumų, sudarytų iš tų dėmenų, būtų lygiai 7 skirtingos sumos?

4. Džonas ir Jonas turi užtektinai 1×2 domino kauliukų. Džonas padengė tais kauliukais (be persidengimų) visą 10×10 matmenų lentą. Įrodykite, kad Jonas visada gali uždengti kauliukais virš Džono denginio (be persidengimų) visą lentą taip, kad nė vienas Jono padėtas kauliukas nesutampa nė su vienu Džono padėtu kauliuku.

5. Klasėje mokosi 22 mokiniai. Per matematikos kontrolinį mokytojas davė spręsti kiekvienam po tris skirtingus uždavinius taip, kad jokie du moksleiviai negavo trijų vienodų uždavinių. Be to, mokytojas padalino klasę į kelias (mažiausiai 2) grupes ir paskirstė uždavinius taip, kad joks uždavinys nebuvo duotas spręsti skirtingų grupių moksleiviams. Įrodykite, kad mokytojui prireikė ne mažiau kaip 10 uždavinių.

X klasė

1. Kam lygus reiškinys
$$\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Big)(a+b+c-2),$$
jeigu $a+b+c=a^2+b^2+c^2=a^3+b^3+c^3$?

2. Taškai M ir N atitinkamai yra rombo $ABCD$ kraštinių BC ir CD vidurio taškai. Įrodykite: jeigu atkarpos AM ir BN yra statmenos, tai $ABCD$ yra kvadratas.

3. Skaitmenys 4, 5, 6, 7, 8 ir 9 rašomi į seką taip, kad tarp bet kurių keturių iš eilės einančių skaitmenų būtų ne daugiau kaip vienas skaitmuo 4, tarp bet kurių penkių iš eilės einančių skaitmenų — ne daugiau kaip vienas skaitmuo 5, tarp bet kurių iš eilės einančių skaitmenų — ne daugiau kaip vienas skaitmuo 6, tarp bet kurių septynių iš eilės einančių skaitmenų — ne daugiau kaip vienas skaitmuo 7, tarp bet kurių iš eilės einančių skaitmenų — ne daugiau kaip vienas skaitmuo 8, tarp bet kurių 9 iš eilės einančių skaitmenų — ne daugiau kaip vienas skaitmuo 9.
   a) Įrodykite, kad toje sekoje negali būti be galo daug narių.
   b) Raskite patį didžiausią eilės narių skaičių.

4. Duota 100 skirtingų realiųjų skaičių. Pats mažiausias iš jų yra 0,08, pats didžiausias — 40, o jeigu imtume visas galimas tokių skaičių poras ir suskaičiuotume kiekvienos poros sumą, tai gautume lygiai 197 skirtingus rezultatus. Raskite duotųjų 100 skaičių sumą.

5. Miesto matematikos olimpiadoje dalyvavo 1000 moksleivių. Kiekvienas moksleivis sprendė po 3 skirtingus uždavinius, jokie du moksleiviai negavo spręsti visų vienodų uždavinių, jokie du moksleiviai iš skirtingų rajonų (mieste daugiau negu vienas rajonas ir iš kiekvieno rajono olimpiadoje dalyvavo bent vienas moksleivis) negavo spręsti to paties uždavinio.
   Įrodykite, kad olimpiadoje buvo duota spręsti ne mažiau negu 23 uždaviniai.

XI klasė

1. Natūraliųjų skaičių x, y ir z suma lygi 100. Raskite didžiausią galimą reiškinio $xy+yz+zx$ reikšmę.

2. Raskite visus natūraliuosius skaičius m ir n, tenkinančius lygybę
$$\Big[\frac{n^2}{m}\Big]=\Big[\frac{n}{m}\Big]+mn$$
([x] žymi skaičiaus x sveikąją dalį).

3. Plokštumoje duoti keli skrituliai. Tegul d yra toks teigiamas skaičius, kad bet kuriuos du skritulius galima uždengti skrituliu, kurio skersmuo lygus d. Įrodykite, kad visus skritulius galima uždengti kvadratu, kurio kraštinė lygi d.

4. Lygiagretainyje $ABCD$ pažymėtas kraštinės CD vidurio taškas m. Tegu $AM=a$, $BM=b$ ir $AB=c$. Kraštinėse AD ir BC atitinkamai pažymėti tokie taškai N ir K, kad $\frac{DN}{NA}=\frac{2b}{c}$ ir $\frac{CK}{KB}=\frac{2a}{c}$. Įrodykite, kad tiesė KN eina per trikampio AMB įbrėžtinio apskritimo centrą.

5. Raskite patį didžiausią natūralųjį skaičių ir patį mažiausią natūralųjį skaičių n, kad egzistuotų n tokių skirtingų realiųjų skaičių, jog tarp 2004 paporių sumų yra lygiai 2004 skirtingos sumos.

XII klasė

1. Realieji skaičiai x, y ir z tenkina sistemą

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=70, \\ x^3+y^3+z^3=64, \\ (x+y)(y+z)(z+x)=-24. \end{cases}$$

Raskite reiškinio $x^4+y^4+z^4+2$ reikšmę.

2. Įrodykite, kad

$$4\sin\frac{\pi}{14}\cdot\sin\frac{3\pi}{14}\cdot\sin\frac{5\pi}{14}=1-\sin\frac{\pi}{14}+\sin\frac{3\pi}{14}-\sin\frac{5\pi}{14}.$$

3. Tetraedro $PABC$ visi plokštieji kampai prie viršūnės P yra statūs. Įrodykite, kad tetraedro tūris V tenkina nelygybes

$$\frac{\sqrt{3}}{2}H^3 \leqslant V \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}L^3,$$

kur H — tetraedro aukštinė, išvesta iš viršūnės P, o L — atkarpos, jungiančios viršūnę P ir trikampio ABC pusiaukraštinių sankirtos tašką, ilgis.

4. Iškilajame keturkampyje $ABCD$ taškai K ir L atitinkamai yra kraštinių DC ir AB vidurio taškai. Duota, kad $AB=AC=BD$ ir $\angle LKC=\angle LBC$. Raskite kampo ADC didumą.

5. Skaitmenys 3, 4, 5 ir 6 rašomi į seką taip, kad tarp bet kurių trijų iš eilės einančių skaitmenų būtų bent vienas skaitmuo 3, tarp bet kurių keturių iš eilės einančių skaičių — bent vienas skaitmuo 4, tarp bet kurių penkių iš eilės einančių skaičių — bent vienas skaitmuo 5, tarp bet kurių šešių iš eilės einančių skaitmenų — bent vienas skaitmuo 6. Kiek daugiausiai skaitmenų galima parašyti laikantis šitos sąlygos?

Vilniaus miesto jaunųjų matematikų olimpiada, 2004 01 24
IX (I gimnazijos) klasė

1. Apskaičiuokite funkcijos $f(x)=ax^2+bx-2$ koeficientus a ir b, jei mažiausią reikšmę, lygią -6, ji įgyja, kai $x=2$. (4 *taškai*)

2. Užkoduoto užrakto šifras yra dviženklis skaičius. Buratinas užmiršo kodą, bet prisimena, kad skaičiaus skaitmenų suma, sudėta su skaičiaus skaitmenų sandauga, yra lygi pačiam skaičiui. Surašykite visus galimus skaičius, kad Buratinas galėtų kuo greičiau atrakinti užraktą. (4 *taškai*)

3. Keturženklis skaičius sudarytas iš vienodų skaitmenų. Penkiaženklis skaičius taip pat sudarytas iš vienodų skaitmenų. Dalydami penkiaženklį skaičių iš keturženklio gauname dalmenį 16 ir liekaną. Dalinyje ir dalikiyje atmetus po vieną skaitmenį, dalmuo nepasikeičia, o liekana sumažėja 2000. Raskite tuos skaičius. (4 *taškai*)

4. Apskaičiuokite:

$$\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{6^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{7^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2002^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2003^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2004^2}\right).$$

(4 *taškai*)

5. AD, BE ir CF yra smailiojo trikampio ABC aukštinės. Įrodykite, kad

$$\frac{AF}{BF}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1.$$

(4 *taškai*)

X (II gimnazijos) klasė

1. Apskaičiuokite $f(2)$, jeigu su bet kuriuo $x \neq 0$ teisinga lygybė $f(x)+3f(\frac{1}{x}) = x^2$.(4 *taškai*)

2. Užkoduoto užrakto šifras yra dviženklis skaičius. Buratinas užmiršo kodą, bet prisimena, kad skaičiaus skaitmenų suma, sudėta su skaičiaus skaitmenų sandauga, yra lygi pačiam skaičiui. Surašykite visus galimus skaičius, kad Buratinas galėtų kuo greičiau atrakinti užraktą. (3 *taškai*)

3. Įrodykite, kad skaičius $9992^{2004}+2$ nėra sveikojo skaičiaus kvadratas. (4 *taškai*)

4. AD, BE ir CF yra smailiojo trikampio ABC aukštinės. Įrodykite, kad

$$\frac{AF}{BF}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1.$$

(4 *taškai*)

5. Ar lygtis $14x^2+15y^2=7^{2003}$ turi natūraliųjų sprendinių? (5 *taškai*)

XI klasė

1. Išspręskite lygčių sistemą:

$$\begin{cases} 4|y|+7x=-12, \\ 6|x|+8=|x|y+4y. \end{cases}$$

(4 *taškai*)

2. Skaičiaus n dešimtainiame užraše yra šešiasdešimt trys skaitmenys. Tarp šių skaitmenų tik dvejetai, trejetai ir ketvertai, kitų skaitmenų nėra. Žinoma, kad dvejetų skaičius 21 didesnis už ketvertų skaičių. Raskite skaičiaus n dalybos iš 9 liekaną. (4 *taškai*)

3. Jeigu skystį išpilstytume į 40 ℓ talpos indus, tai vienas indas būtų nepilnas. Jeigu tą skystį išpilstytume į 50 ℓ talpos indus, tai indų reikėtų 5 vienetais mažiau ir visi indai būtų pripildyti. Jeigu tą skystį išpilstytume į 70 ℓ talpos indus, tai reikėtų dar 4 indais mažiau nei pilstant į 50 ℓ talpos indus, bet vėl vienas indas būtų nepilnas. Kiek litrų skysčio buvo inde? (5 *taškai*)

4. Į statųjį trikampį įbrėžto apskritimo lietimosi taškas dalija įžambinę į atkarpas, kurių ilgiai m ir n. Įrodykite, kad trikampio plotas $S=mn$. (4 *taškai*)

5. Įrodykite, kad daugianaris $(x-2)^{2003}-(x-1)^{2004}$ dalijasi iš x^2-3x+2. (3 *taškai*)

XII klasė

1. Išspręskite lygtį: $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$. (3 *taškai*)

2. Skaičiaus n dešimtainiame užraše yra šešiasdešimt trys skaitmenys. Tarp šių skaitmenų tik dvejetai, trejetai ir ketvertai, kitų skaitmenų nėra. Žinoma, kad dvejetų skaičius 21 didesnis už ketvertų skaičių. Raskite skaičiaus n dalybos iš 9-ių liekaną. (4 *taškai*)

3. Jeigu skystį išpilstytume į 40 ℓ talpos indus, tai vienas indas būtų nepilnas. Jeigu tą skystį išpilstytume į 50 ℓ talpos indus, tai indų reikėtų 5 vienetais mažiau ir visi indai būtų pripildyti. Jeigu tą skystį išpilstytume į 70 ℓ talpos indus, tai reikėtų dar 4 indais mažiau nei pilstant į 50 ℓ talpos indus, bet vėl vienas indas būtų nepilnas. Kiek litrų skysčio buvo inde? (5 *taškai*)

4. Išspręskite lygtį $\sin(\frac{\pi}{6}+[\frac{\pi}{6x}])=\frac{1}{2}$ ($[a]$ — sveikoji skaičiaus a dalis). (4 *taškai*)

5. Į apskritimą įbrėžtas lygiakraštis $\triangle ABC$. Lanke BC pažymėtas taškas M. Įrodykite, kad $MB+MC=MA$. (4 *taškai*)

LII Lietuvos moksleivių olimpiada
Kėdainiai, 2003 04 15
IX–X klasės

1. Ratu bet kokia tvarka po vieną kartą surašyti visi natūralieji skaičiai nuo 1 iki 2003. Du gretimus skaičius a ir b galima sukeisti vietomis, jei $a - b > 1$. Įrodykite, kad taip sukeičiant skaičius visada galima juos išdėstyti didėjimo tvarka.

2. Nagrinėkime natūraliųjų skaičių ketvertus (a, b, c, d), tenkinančius sąlygas:

$$a + b + c + d = ab + cd, \quad a \leqslant b \leqslant c \leqslant d.$$

a) Raskite bent du tokius ketvertus.
b) Raskite visus tokius ketvertus.

3. Trikampio ABC pusiaukampinės AM ir BN susikerta taške Q. Apie trikampį MQN apibrėžtas apskritimas eina per tašką C. Raskite trikampio QMN kampus.

4. Egzaminą raštu laiko 67 studentai. Užduotį sudaro 6 klausimai. Už teisingą atsakymą į pirmą klausimą studentas gauna 1 tašką, priešingu atveju gauna -1 tašką, už antrą klausimą – atitinkamai 2 arba -2 taškus ir t. t., už šeštą – atitinkamai 6 arba -6 taškus.
a) Raskite mažiausią galimą teigiamą skirtumą tarp dviejų studentų surinktų balų sumų.
b) Įrodykite, kad bent keturi studentai surinks vienodą balų sumą.
c) Įrodykite, kad bent du studentai gaus visiškai vienodus įvertinimus už kiekvieną klausimą.

XI–XII klasės

1. Natūralusis skaičius n yra toks, kad skaičiai $2n + 1$ ir $3n + 1$ yra sveikųjų skaičių kvadratai.
a) Įrodykite, kad n dalijasi iš 8.
b) Ar būtinai n dalijasi iš 16?

2. Turime lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x_1^2 + \frac{1}{x_2^2} = 4, \\ x_2^2 + \frac{1}{x_3^2} = 1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{2n-1}^2 + \frac{1}{x_{2n}^2} = 4, \\ x_{2n}^2 + \frac{1}{x_1^2} = 1. \end{cases}$$

a) Tegul $n = 2$. Raskite bent 3 sistemos sprendinius.
b) Tegul $n = 2$. Raskite visus sprendinius.
c) Išspręskite sistemą su kiekvienu natūraliuoju n.

3. Į apskritimą įbrėžto iškilojo septynkampio trys kampai lygūs 120°. Įrodykite, kad mažiausiai dviejų jo kraštinių ilgiai lygūs.

4. Stačiakampė lenta 6×9 sudaryta iš 54 vienetinių kvadratėlių. Į kai kuriuos jos langelius galima padėti po vieną šaškę.
a) Ar galima taip padėti šaškes, kad bet kuriuose dviejuose kvadratuose 4×4 šaškių skaičius būtų skirtingas?
b) Ar galima taip padėti šaškes, kad bet kuriuose dviejuose kvadratuose 5×5 šaškių skaičius būtų skirtingas?

XVIII Lietuvos komandinė matematikos olimpiada
Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, 2003 09 27

1. Išspręskite lygtį
$$2^{\frac{1}{2}-2|x|} = \left|x+\frac{1}{2}\right| + \left|x-\frac{1}{2}\right|.$$

2. Išspręskite lygčių sistemą
$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=\frac{1}{3}, \\ x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 = xyz(x+y+z)^3. \end{cases}$$

3. Raskite visas natūraliąsias n reikšmes, su kuriomis n^4+4^n yra pirminis skaičius.

4. Įrodykite, kad $x_1+x_2+\dots+x_n - x_1x_2\cdots x_n \leqslant n-1$, kai $x_1, x_2, \dots, x_n \geqslant 1$.

5. Įrodykite, kad
$$\frac{x_1}{1-x_1}+\frac{x_2}{1-x_2}+\dots+\frac{x_n}{1-x_n} \geqslant \frac{n}{n-1},$$
kai $n \geqslant 2$, $0 \leqslant x_1, x_2, \dots, x_n < 1$ ir $x_1+x_2+\dots+x_n = 1$.

6. Įrodykite, kad
$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\dots\left(1+\frac{1}{2^n}\right) < 3,$$
kai n — natūralusis skaičius.

7. Įrodykite, kad
$$3\left(x^4+y^4+z^4\right)+48 \geqslant 8\left(x^2y+y^2z+z^2x\right),$$
kai x, y, z — realieji skaičiai.

8. Raskite visas natūraliąsias n reikšmes, su kuriomis reiškinys $36^n+24^n-7^n-5^n$ dalijasi iš 899 be liekanos.

9. Įrodykite, kad egzistuoja be galo daug tokių natūraliųjų skaičių n, kad 2003^n-1 dalijasi iš n be liekanos.

10. Raskite visas natūraliąsias n reikšmes, su kuriomis 80^n-1 dalijasi iš 8^n-1 be liekanos.

11. Raskite visus tokius natūraliųjų skaičių šešetus $(a_1, a_2, \dots, a_6)$, kad $a_6 = 144$ ir
$$a_{n+3} = a_{n+2}(a_{n+1}+a_n), \quad \text{kai } n = 1, 2, 3.$$

12. Raskite visus tokius natūraliųjų skaičių trejetus, kad bet kurių dviejų iš jų sandaugą dalijant iš trečiojo skaičiaus gaunama liekana yra lygi 1.

13. Ar egzistuoja dešimtojo laipsnio daugianaris $p(x) = x^{10}+a_9x^9+\dots+a_1x+a_0$ su natūraliaisiais koeficientais $a_1, a_2, \dots, a_9$, turintis 10 realiųjų šaknų ir tenkinantis sąlygą $p(2003) < 10^{33}$?

14. Ar egzistuoja funkcija $f(x)$, apibrėžta su kiekvienu realiuoju x ir tenkinanti sąlygas
$$f\left(-x^3\right) \geqslant f^2\left(x^2\right)+\frac{1}{4}$$
kiekvienam realiajam x bei $f(y) \neq f(z)$ kiekvienai realiųjų skaičių porai (y, z), $y \neq z$?

15. Ar egzistuoja funkcija $f(x)$, apibrėžta su kiekvienu realiuoju x ir tenkinanti sąlygas $f(f(f(x))) = x$ bei $f(0) = 2003$?

16. Aplink apskritimą yra surašyti 2003 skaičiai, kiekvienas iš kurių yra lygus arba 1 arba 0. Pradžioje ne visi skaičiai yra vienodi. Su jais atliekama tokia operacija: tarp dviejų skirtingų greta esančių skaičių įrašomas 1, o tarp dviejų vienodų greta esančių — 0, tada pradiniai skaičiai nutrinami, ir vėl lieka 2003 skaičiai. Ar galima po kelių tokių operacijų gauti visus nulius?

17. Lygiagretainio kraštinės yra lygios a ir b, o įstrižainės c ir d. Raskite jo kampus, jei $a^4 + b^4 = (cd)^2$.

18. Vienetiniame apskritime yra pažymėta n taškų ($n \geqslant 2$), kurie sujungti atkarpomis. Įrodykite, kad yra ne daugiau kaip $\frac{n^2}{3}$ atkarpų, ilgesnių už $\sqrt{2}$.

19. Duota n ($n \geqslant 2$) taškų, iš kurių jokie trys nepriklauso vienai tiesei. Kiek mažiausiai reikia spalvų norint nuspalvinti visas taškus jungiančias atkarpas taip, kad jokios dvi atkarpos, turinčios bendrą viršūnę, nebūtų nuspalvintos viena spalva?

20. Taškas P yra trikampio ABC viduje ir tenkina sąlygas

$$\angle ABC + \angle ACB = 3\angle PBA = 3\angle PCA.$$

Įrodykite, kad

$$\frac{AC}{AB + PC} = \frac{AB}{AC + PB}.$$

Penktoji jaunesniųjų klasių moksleivių matematikos olimpiada Vilniaus universitete
Vilnius, 2003 09 27

V–VI klasės

1. Skaičius vadinamas simetriniu, jeigu jis lieka toks pat, ar jį rašytum iš kairės į dešinę, ar atvirkščiai — iš dešinės į kairę (pavyzdžiui, 7227 yra simetrinis skaičius).
   a) Raskite vieną tokį simetrinį skaičių, kuris baigiasi 27, dalijasi iš 27 ir kurio skaitmenų suma irgi lygi 27.
   b) Raskite tris tokius skaičius.
   c) Raskite mažiausią tokį skaičių.

2. Visuose lentelės 4×4 laukeliuose surašyti pliusai. Vienu ėjimu leidžiama imti bet kurį kvadratą 2×2 ir visus laukelių ženklus pakeisti priešingais. Ar atlikus keletą tokių ėjimų įmanoma iš lentelės su visais pliusais gauti lentelę, kurioje pliusai ir minusai eitų šachmatine tvarka?

3. Ar galima plokštumoje rasti tokius 4 taškus, kad visi šeši įmanomi atstumai tarp tų taškų būtų 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm ir 6 cm?

4. 100 metrų ilgio rąstas buvo supjaustytas į 3 ir 4 metrų ilgio rąstgalius, kurių iš viso buvo 30. Po to prireikė juos supjaustyti į 1 m ilgio dalis. Kiek kartų reikės rąstgalius pjauti?

5. Lentoje buvo parašyti skaičiai 1, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 16. Petras ir Jonas paeiliui išbraukė 4 skaičius, po to Jonas išbraukė dar 4 skaičius. Petro išbrauktų skaičių suma buvo 3 kartus didesnė už Jono išbrauktų skaičių sumą. Koks skaičius liko neišbrauktas?

VII–VIII klasės

1. Kiek yra penkiaženklių skaičių, užrašomų vien tik skaitmenimis 2 ir 5 (net nebūtinai abiem) ir tokių, kad jokie 2 dvejetai nestovi šalia? O kiek yra tokių dešimtženklių skaičių?
2. Trikampio ABC pusiaukraštinėje BM yra pažymėtas toks taškas S, kad $BS = 3SM$. Tiesė, einanti per taškus A ir S, kerta trikampio kraštinę BC taške N. Raskite keturkampio $CMSN$ plotą, jeigu pradinio trikampio ABC plotas yra 40.
3. Nurodykite nors vieną tokį skaičių, kuris baigiasi 2003, dalijasi iš 2003 ir kurio skaitmenų suma yra lygi 2003.
4. Iš natūraliųjų skaičių nuo 1 iki 22, parašius juos visus po vieną kartą, buvo sudaryta 11 trupmenų. Koks galėjo būti didžiausias skaičius trupmenų, lygių sveikiems skaičiams?

Kauno miesto 2004 metų matematikos olimpiada
II rato uždaviniai
IX klasė

1. Ar galima tam tikro ilgio vielos gabalą sukarpyti į tris vienodo ilgio virbus taip, kad vieną iš jų sutrumpinus vienu decimetru, o kitą — dviem decimetrais ir sujungus jų galus, susidarytų statusis trikampis? Jei galima, tai kokio ilgio viela turėtų būti? Atsakymą pagrįskite. (3 *taškai*)
2. Dviženklio skaičiaus skaitmenų suma lygi 15. Iš to skaičiaus atėmus 27, gaunamas skaičius, užrašytas tais pačiais skaitmenimis, bet atvirkščia tvarka. Raskite pradinį skaičių. (3 *taškai*)
3. Išskaidykite dvinarį $x^4 + 4$ dauginamaisiais. (3 *taškai*)
4. Raskite santykį $\frac{x}{y}$, jei $\frac{x^2-2xy+4y^2}{x^2+y^2} = 1{,}5$. (3 *taškai*)
5. Dviejų natūraliųjų skaičių suma lygi 596. Vienas iš šių skaičių baigiasi skaitmeniu 2. Jeigu šį skaitmenį nubrauktume, tai gautume kitą skaičių. Raskite šiuos skaičius. (4 *taškai*)
6. Mokinys turėjo išspręsti 20 uždavinių. Už kiekvieną teisingai išspręstą uždavinį jam buvo skiriami 8 balai, už klaidingai — atimami 5 balai, o už neišspręstą uždavinį — 0 balų. Mokinys surinko 13 balų. Kiek uždavinių ji išsprendė? (4 *taškai*)

X klasė

1. Mokinys turėjo išspręsti 20 uždavinių. Už kiekvieną teisingai išspręstą uždavinį jam buvo skiriami 8 balai, už klaidingai — atimami 5 balai, o už neišspręstą uždavinį 0 balų. Mokinys surinko 13 balų. Kiek uždavinių išsprendė mokinys? (4 *taškai*)
2. Raskite santykį $\frac{x}{y}$, jei $\frac{x^2-2xy+4y^2}{x^2+y^2} = 1{,}5$. (3 *taškai*)
3. 1 m^2 ploto kvadrato įstrižainė padalyta į 3 lygias dalis. Vidurinė įstrižainės dalis yra mažesnio kvadrato įstrižainė. Raskite mažesniojo kvadrato plotą. (3 *taškai*)
4. Trijų sveikųjų skaičių suma lygi 0. Ar gali jų kubų suma būti didesnė už 200420042004? (4 *taškai*)
5. Lentoje užrašyti skaičiai $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{3}$. Vienu ėjimu leidžiama išsirinkti du iš užrašytų skaičių (pažymėkim juos a ir b), juos nutrinti ir jų vietoje parašyti skaičius $\frac{b^2}{a}$ ir $\frac{a^2}{b}$. Ar po keleto ėjimų lentoje gali atsirasti skaičiai $\frac{4}{3}$, $\frac{4}{5}$ ir $\frac{5}{2}$? (6 *taškai*)

XI klasė

1. Trupmenos vardiklis 5 vienetais didesnis už skaitiklį. Jei prie trupmenos skaitiklio pridėsime 14, o iš vardiklio atimsime 1, tai gausime trupmeną, atvirkštinę duotajai. Raskite duotąją trupmeną. (3 *taškai*)
2. Išspręskite nelygybę $\sqrt{x^2+6x+9}+\sqrt{x^2-2x+1}<6$. (3 *taškai*)
3. Išspręskite lygtį $2=\sqrt[3]{1+\sqrt{x+\sqrt[3]{1+\sqrt{x+\cdots}}}}$. (4 *taškai*)
4. Kas daugiau: 107^{50} ar 73^{75}? (4 *taškai*)
5. Trikampis ABC yra lygiakraštis. Kraštinėse AB ir BC atitinkamai paimti taškai M ir N taip, kad $MB+BN=AC$. Įrodykite, kad $\angle MAN+\angle MCN=60°$. (6 *taškai*)

XII klasė

1. Ar gali daugiakampio įstrižainių skaičius būti tris kartus didesnis už jo kraštinių skaičių? (3 *taškai*)
2. Firmoje dirba x samdytų darbininkų. Savininko pajamos yra $D(x)=41x-x^2$ piniginių vienetų, o jo išlaidos yra $P(x)=7x$ piniginių vienetų. Savininko pelnas lygus $T(x)=D(x)-P(x)$. Koks galimas didžiausias pelnas piniginiais vienetais? (3 *taškai*)
3. Su kuriomis a reikšmėmis lygtis $x^2-(2^a-1)x-3(4^{a-1}-2^{a-2})=0$ turi du sprendinius? (3 *taškai*)
4. Į trikampį, kurio kraštinės 63, 39 ir 60, įbrėžtas apskritimas. Nubrėžta apskritimo liestinė, lygiagreti ilgiausiai trikampio kraštinei. Apskaičiuokite gautosios trapecijos plotą. (3 *taškai*)
5. Duota, kad $f(x^2+1)=x^4+4x^2$. Raskite $f(x^2-1)$. (4 *taškai*)
6. Duota, kad $a^3=a+1$. Įrodykite, kad $a^5=a^4+1$. (4 *taškai*)