$\alpha + \omega$, 2003, Nr. 2, 69–70

Uždavinys apie studentų egzaminą

Svajūnas Sajavičius
svajunas.sajavicius@mail.lt

XI klasės matematikos uždavinyne (*Matematika* 11, *Uždavinynas*, p. 80) yra toks uždavinys, pažymėtas 40-uoju numeriu:

Egzamino metu studentai sėdi už bendro stalo ant vieno suolo, kurio abu galai yra šalia praėjimų. Egzaminą studentai baigia atsitiktine tvarka ir išsyk išeina. Kokia tikimybė, kad bent vienas studentas, norėdamas išeiti, turės paprašyti jį praleisti, jeigu studentų yra: a) 3; b) 4; c) 6?

Šis uždavinys 2002 metais buvo pateiktas abiturientams pakartotinės sesijos metu per valstybinį matematikos egzaminą ir, tikriausiai, buvo nelengvas daugeliui iš jų. Žurnalo „Alfa plius omega“ 2003 metų pirmajame numeryje Valdas Vanagas pasiūlė šį uždavinį išspręsti skaitytojams. Pabandykime tai padaryti.

Sprendimas. Tarkime, egzaminą laiko k studentų. Pažymėkime įvykius:

A_k — „bent vienas iš k egzaminą laikiusiųjų studentų, norėdamas išeiti, turės paprašyti jį praleisti“;

B_i — „i-asis egzaminą baigęs studentas, norėdamas išeiti, neturės prašyti jo praleisti“, $i = (1, 2, \ldots, k)$.

Įvykiui A_k priešingas įvykis $\overline{A}_k$ — „nė vienas iš k studentų, norėdamas išeiti, neturės prašyti jo praleisti“. Aišku, kad $\overline{A}_k = B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_k = \bigcap_{i=1}^{k} B_i$. Įvykiai B_i nepriklausomi, todėl

$$\mathbf{P}(\overline{A}_k) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} B_i\right) = \mathbf{P}(B_1) \cdot \mathbf{P}(B_2) \cdots \mathbf{P}(B_k) = \prod_{i=1}^{k} \mathbf{P}(B_i) \tag{1}$$

ir

$$\mathbf{P}(A_k) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A}_k). \tag{2}$$

Kad būtų lengviau, pirmiausiai panagrinėkime atvejį, kai egzaminą laiko, pavyzdžiui, šeši studentai ($k = 6$).

Nesunku suprasti, kad norinčiam išeiti studentui nereikės prašyti jo praleisti, jeigu jis sėdi ant suolo krašto, t. y. niekas nesėdi jam iš dešinės arba iš kairės. Jeigu ant suolo sėdi ne mažiau kaip du studentai, visada tokių studentų bus du.

Lengva rasti įvykių B_i, $i = (1, 2, \ldots, 6)$, tikimybes:

$$\mathbf{P}(B_1) = \frac{2}{6}, \quad \mathbf{P}(B_2) = \frac{2}{5}, \quad \mathbf{P}(B_3) = \frac{2}{4}, \quad \mathbf{P}(B_4) = \frac{2}{3}, \quad \mathbf{P}(B_5) = \mathbf{P}(B_6) = 1.$$

Pagal (1) formulę

$$\mathbf{P}(\overline{A}_6) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{6} B_i\right) = \prod_{i=1}^{6} \mathbf{P}(B_i) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{2}{45},$$

o pagal (2) formulę

$$\mathbf{P}(A_6) = 1 - \frac{2}{45} = \frac{43}{45}.$$

Analogiškai galime uždavinį išspręsti, kai $k = 3, 4, \dots, 10, \dots, 17, \dots$.
Dabar jau tikrai visai nesunku išspręsti uždavinį, kai yra n studentų ($k = n$).
Šiuo atveju

$$\mathbf{P}(B_1) = \frac{2}{n}, \qquad \mathbf{P}(B_2) = \frac{2}{n-1}, \qquad \dots, \qquad \mathbf{P}(B_{n-2}) = \frac{2}{3}, \qquad \mathbf{P}(B_{n-1}) = \mathbf{P}(B_n) = 1.$$

Tada pagal (1) formulę

$$\mathbf{P}(\overline{A}_n) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(B_i) = \frac{2}{n} \cdot \frac{2}{n-1} \cdots \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{2^{n-2}}{\frac{n!}{2}} = \frac{2^{n-1}}{n!} r$$

ir pagal (2) formulę

$$\mathbf{P}(A_n) = 1 - \frac{2^{n-1}}{n!} = \frac{n! - 2^{n-1}}{n!}.$$

Mūsų išspręstas uždavinys patvirtina tokią nerašytą tikimybių teorijos uždavinių sprendimo taisyklę: jeigu įvykio tikimybę apskaičiuoti sunku, verta pabandyti suformuluoti priešingą įvykį ir apskaičiuoti jo tikimybę. Sėkmės!

KLAUSIMĖLIS

Nelygų nuliui skaičių dalydami iš jo paties gauname vienetą, t. y.

$$a : a = 1, \quad \text{kai } a \neq 0.$$

Todėl iš pirmo žvilgsnio gali pasirodyti, kad lygybė

$$2\sqrt{2} : 2\sqrt{2} = 2$$

yra neteisinga. Bet ji yra teisinga. Manau, kad per valstybinį egzaminą daug kam ji pakištų koją... Kiek dvejetukų šioje lygybėje galima įžiūrėti?

Valdas Vanagas