

## Teisingos dalybos

Juozas Mačys  
jmacys@ktl.mii.lt

*Bepigu pasidalyti teisingai, kai yra vienas paprastas teisingų dalybų kriterijus, pavyzdžiui, plotų ar tūrių lygumas. Tačiau dažnai dalies vertė priklauso nuo įvairių aplinkybių: nedidelis žemės sklypas prie ežero vertingesnis už didelį sklypą laukymėje ir pan. Straipsnyje aprašomos teisingos dalybos, tinkančios ir tokiems sudėtingiems atvejams.*

Matematika... Kiek daug ginčijamasi, kas ji yra iš tikrųjų ir kokios jos reikia mokyti mokykloje. Deja, vienareikšmiško atsakymo į šiuos klausimus nėra, ir net geriausias matematikas čia nieko įrodyti negali.

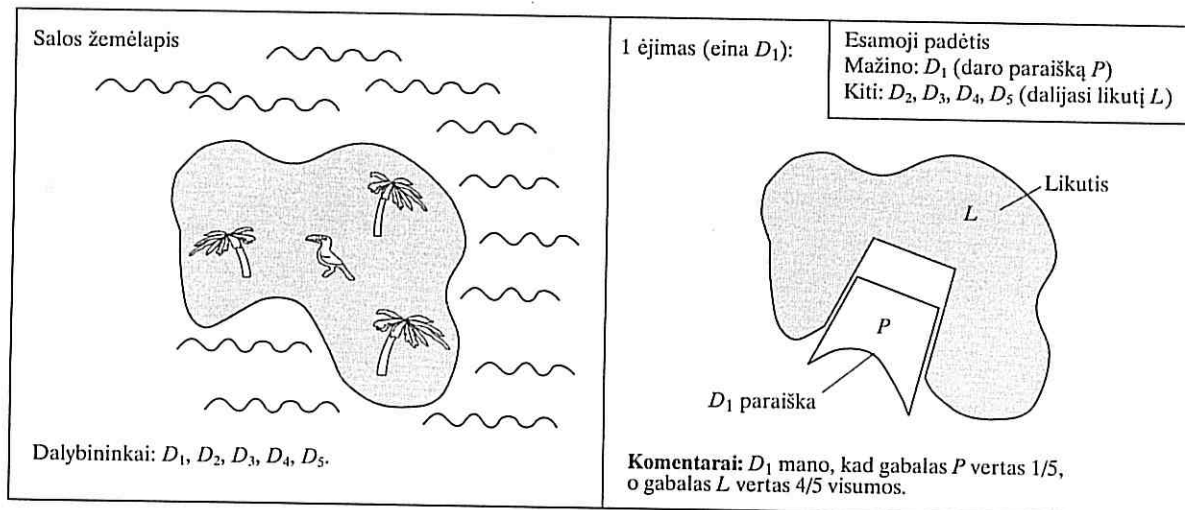
Taigi lieka vienintelė išeitis — parodyti kuo platesnį spektrą uždavinių, kuriuos sprendžia žmonės, susiję su matematika. Viena iš to spektro spalvų Lietuvoje yra ypač mažai žinoma ir neįprasta, netgi paradoksali — tai *šiuolaikinė* matematika ir jos taikymai *visuomenės* gyvenime. Dar įdomiau, kai šiuolaikinė visuomenės mokslų matematika bandoma pateikti *moksleiviams*.

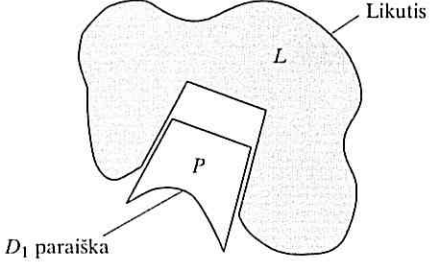
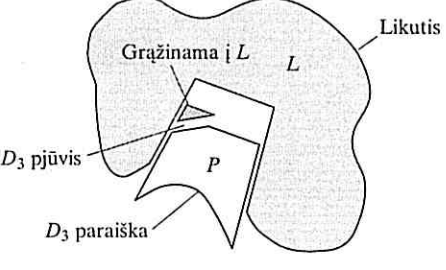
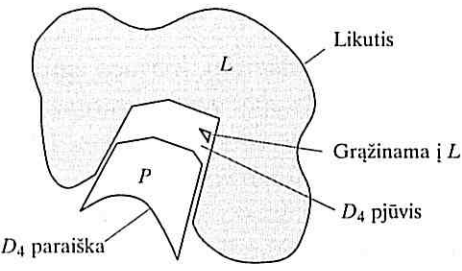
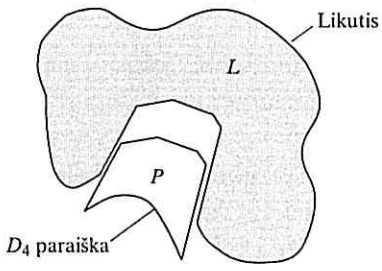
Tai ir daroma P. Tannenbaumo ir R. Arnoldo knygoje „Kelionės po šiuolaikinę matematiką“, kurią dar 1993 m. išleido leidykla TEV. Knygos populiarumą liudija ir tai, kad Jungtinėse Valstijose jau pasirodė 5 jos leidimai.

Žemiau pateikiamas pavyzdys iš knygos skyriaus „Teisingos dalybos“. Jis vaizdžiai parodo, kaip nuo vaikystės žinomas riestainio dalijimo būdas „tu laužk, o aš rinksiuos“ matematikų rankose tampa galingu įrankiu praktiniams uždaviniams spręsti. Šiuolaikinei matematikai iš viso būdingas metodų gyvenimiškumas bei paprastumas, ir knyga tai atskleidžia meistriškai.

**Pavyzdys.** Penki jūreiviai ištremiami į negyvenamą tropikų salą. Bet nėra to blogo, kas neišeitų į gera, — jie nusprendžia sąžiningai pasidalyti salą ir likti joje visam laikui. Kiek pasvarstę, jūreiviai nutaria salą dalytis „paskutinio mažinusojo“ metodu.


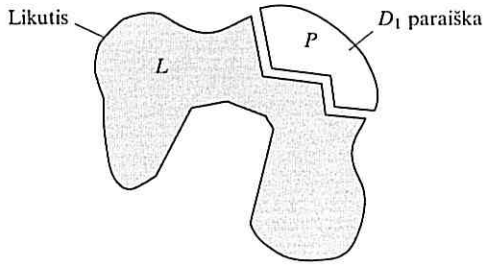
- I ratas.



<p>2 ėjimas (eina <math>D_2</math>): NEMAŽINA</p>  <p><math>D_1</math> paraiška</p> <p>Likutis <math>L</math></p> <p>Komentari: <math>D_2</math> mano, kad gabalas <math>P</math> vertas <math>\leq 1/5</math>, o gabalas <math>L</math> vertas <math>\geq 4/5</math> visumos.</p>	<p>Esamoji padėtis Mažino: <math>D_1</math> (paraiška <math>P</math>) Kiti: <math>D_2, D_3, D_4, D_5</math> (dalijasi <math>L</math>)</p>	<p>3 ėjimas (eina <math>D_3</math>): MAŽINA</p>  <p><math>D_3</math> pjūvis</p> <p><math>D_3</math> paraiška</p> <p>Likutis <math>L</math></p> <p>Komentari: <math>D_3</math> mano, kad <math>D_1</math> paraiška verta daugiau kaip <math>1/5</math> visumos, todėl <math>D_3</math> mažina ją iki (jo nuomone) <math>1/5</math> visumos. <math>D_1</math> ir <math>D_2</math> dalyvis naujajį likutį <math>L</math>, kuris (kiekvieno juodviečių nuomone) vertas <math>&gt; 4/5</math> visumos.</p>	<p>Esamoji padėtis Mažino: <math>D_3</math> (daro naują paraišką <math>P</math>) Kiti: <math>D_1, D_2, D_4, D_5</math> (dalijasi naują <math>L</math>)</p>
<p>4 ėjimas (eina <math>D_4</math>): MAŽINA</p>  <p><math>D_4</math> paraiška</p> <p>Likutis <math>L</math></p> <p>Gražinama į <math>L</math></p> <p><math>D_4</math> pjūvis</p> <p>Komentari: <math>D_4</math> mano, kad dalyvio <math>D_3</math> paraiška verta <math>&gt; 1/5</math> visumos, todėl <math>D_4</math> mažina ją iki (jo nuomone) <math>1/5</math> visumos. <math>D_1, D_2</math> ir <math>D_3</math> tęs naujo likučio <math>L</math> dalybas, kuris (kiekvieno jų nuomone) vertas daugiau kaip <math>4/5</math> visumos.</p>	<p>Esamoji padėtis Mažino: <math>D_4</math> (daro naują paraišką <math>P</math>) Kiti: <math>D_1, D_2, D_3, D_5</math> (dalijasi naują <math>L</math>)</p>	<p>5 ėjimas (eina <math>D_5</math>): NEMAŽINA</p>  <p><math>D_4</math> paraiška</p> <p>Likutis <math>L</math></p> <p>Komentari: <math>D_5</math> mano, kad gabalas <math>P</math> vertas <math>\leq 1/5</math>, o gabalas <math>L</math> vertas <math>\geq 4/5</math> visumos.</p>	<p>Esamoji padėtis Mažino: <math>D_4</math> (paraiška <math>P</math>) Kiti: <math>D_1, D_2, D_3, D_5</math> (dalijasi <math>L</math>)</p>

I ratas baigtas – kiekvienas dalyvis padarė ėjimą (galėjo mažinti arba nemažinti). I rato rezultatas – paskutinis mažinęs ( $D_4$ ) gauna savo pareikštą dalį  $P$ . Likutį  $L$  dalyvis likusieji keturi dalyviai  $D_1, D_2, D_3$  ir  $D_5$ , ir visi jie įsitikinę, kad tas likutis  $\geq \frac{4}{5}$  visumos.

• II ratas.

<p>Dalijamas salos gabalas</p>  <p>Dalyviai: <math>D_1, D_2, D_3, D_5</math>.</p>	<p>1 ėjimas (eina <math>D_1</math>):</p> <p>Esamoji padėtis Mažino: <math>D_1</math> (daro paraišką <math>P</math>) Kiti: <math>D_2, D_3, D_5</math> (dalijasi <math>L</math>)</p>  <p>Likutis <math>L</math></p> <p><math>D_1</math> paraiška</p> <p>Komentari: <math>D_1</math> mano, kad <math>P</math> vertas <math>1/4</math>, o <math>L</math> vertas <math>3/4</math> (naujosios) visumos.</p>
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

<p>2 ėjimas (cina <math>D_2</math>): NEMAŽINA 3 ėjimas (cina <math>D_3</math>): NEMAŽINA</p>	<p>Esamoji padėtis Mažino: <math>D_1</math> (paraiška <math>P</math>) Kiti: <math>D_2, D_3, D_5</math> (dalijasi <math>L</math>)</p>	<p>4 ėjimas (cina <math>D_5</math>): MAŽINA</p>	<p>Esamoji padėtis Mažino: <math>D_5</math> (daro naują paraišką <math>P</math>) Kiti: <math>D_1, D_2, D_3</math> (dalijasi naują <math>L</math>)</p>
<p>Komentariai: <math>D_2</math> ir <math>D_3</math> mano, kad <math>P</math> vertas <math>\leq 1/4</math>, o <math>L</math> vertas <math>\geq 3/4</math> visumos.</p>		<p>Komentariai: <math>D_5</math> mano, kad dalyvio <math>D_1</math> paraiška yra verta <math>&gt; 1/4</math> visumos. <math>D_5</math> mažina senąją paraišką iki naujos <math>P</math>, vertos (jo nuomone) <math>1/4</math> visumos. <math>D_1, D_2</math> ir <math>D_3</math> dalysis naujajį likutį <math>L</math>, kuris (kiekvieno iš jų trijų nuomone) vertas <math>&gt; 3/4</math> visumos.</p>	

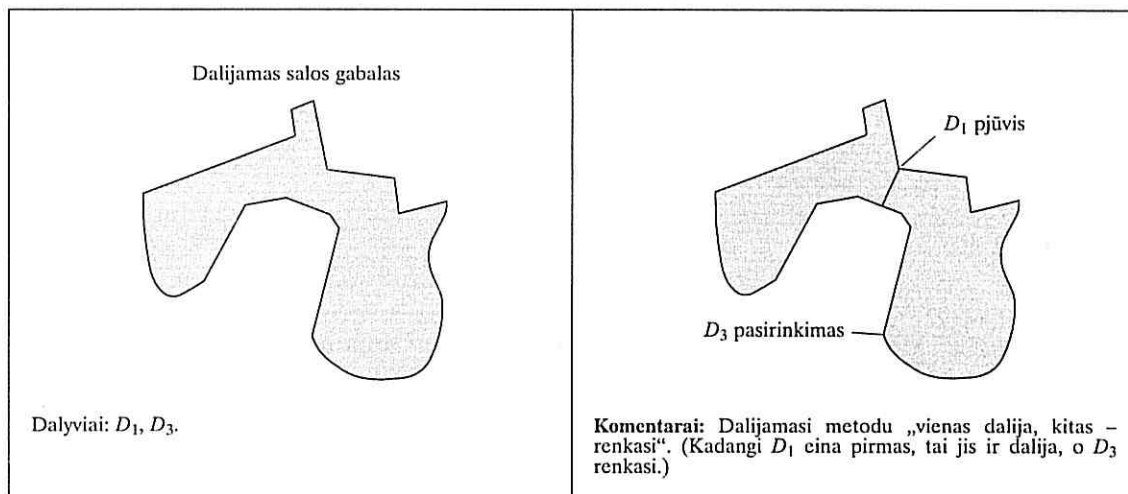
II ratas baigtas – visi dalyviai padarė ėjimą (galėjo mažinti arba nemažinti). II rato rezultatas – paskutinis mažinęs ( $D_5$ ) gauna savo pareikštą dalį  $P$ . Likutį  $L$  dalysis likusieji trys dalyviai  $D_1, D_2$  ir  $D_3$ , ir visi trys jie mano, kad tas likutis  $> \frac{3}{4}$  visumos.

• III ratas.

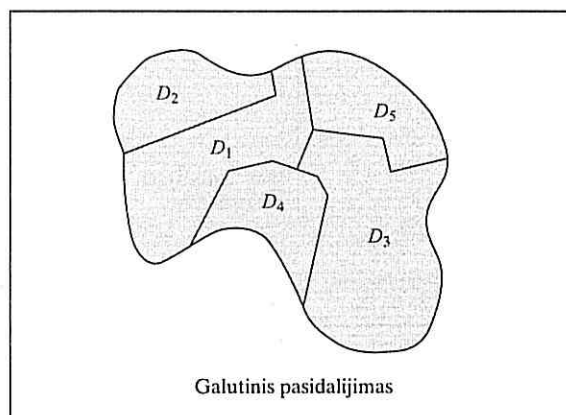
<p>Dalijamas salos gabalas</p> <p>Dalyviai: <math>D_1, D_2, D_3</math>.</p>		<p>1 ėjimas (cina <math>D_1</math>):</p>	<p>Esamoji padėtis Mažino: <math>D_1</math> (daro paraišką <math>P</math>) Kiti: <math>D_2, D_3</math> (dalijasi <math>L</math>)</p> <p>Komentaras: <math>D_1</math> mano, kad <math>P</math> vertas <math>1/3</math>, o gabalas <math>L</math> vertas <math>2/3</math> visumos.</p>
<p>2 ėjimas (cina <math>D_2</math>): MAŽINA</p>	<p>Esamoji padėtis Mažino: <math>D_2</math> (daro naują paraišką <math>P</math>) Kiti: <math>D_1, D_3</math> (dalijasi naują <math>L</math>)</p>	<p>3 ėjimas (cina <math>D_3</math>): NEMAŽINA</p>	<p>Esamoji padėtis Mažino: <math>D_2</math> (paraiška <math>P</math>) Kiti: <math>D_1, D_3</math> (dalijasi <math>L</math>)</p>
<p>Komentariai: <math>D_2</math> mano, kad <math>D_1</math> paraiška verta <math>&gt; 1/3</math> visumos. <math>D_2</math> mažina ją iki (jo nuomone) <math>1/3</math> visumos. <math>D_1</math> su <math>D_3</math> dalysis naujajį likutį <math>L</math>.</p>		<p>Komentariai: <math>D_3</math> mano, kad <math>P</math> vertas <math>\leq 1/3</math>, o <math>L</math> vertas <math>\geq 2/3</math> visumos.</p>	

III ratas baigtas — kiekvienas dalyvis padarė ėjimą (galėjo mažinti arba nemažinti). III rato rezultatas — paskutinis mažinęs ( $D_2$ ) gauna savo pareikštą dalį  $P$ . Likutį  $L$  dalysis likusieji du dalyviai  $D_1$  ir  $D_3$ , ir abu jie mano, kad tas likutis  $\geq \frac{2}{3}$  visumos.

• IV ratas.



IV ratas baigtas. Dalyviai  $D_1$  ir  $D_3$  pasidalijo likusią salos dalį, ir abu jie mano, kad kitam liko  $\leq \frac{1}{2}$  tos dalies. Galutinis salos pasidalijimas pavaizduotas paveiksle. Kiekvienas dalyvis įsitikinęs, kad jam teko  $\geq \frac{1}{5}$  salos.



Dabar jau mokėsime dalytis žemės gabalą ar tortą. Tortą dalytis ypač malonu — užtenka susėsti apie stalą ratu ir ratu siūsti tortą ir peilį. Bet įdomiausia, kad šį dalybų būdą galima dar truputį patobulinti, ir tada jis tinka net nevienarūšiams daiktams dalytis — sakysime, palikimui, kurį sudaro namas, mašina, brangūs paveikslai ir daug kas kita. Visi paveldėtojai tokio dalybų būdo dėka lieka patenkinti, ir (įsivaizduokite!) kiekvienas iš jų lieka įsitikinęs, kad būtent jam teko geriausia ir didžiausia palikimo dalis. Tai ir daugybė kitų įdomių dalykų aprašyta knygoje.