$\alpha + \omega$, 2003, Nr. 2, 61–64

Kodėl cos 1 *iracionalus*?

Juozas Mačys
jmacys@ktl.mii.lt

Kad realiųjų skaičių aibę sudaro racionaliųjų ir iracionaliųjų skaičių „partijos", visi žino. Tačiau kuriai „partijai" priklauso iš įvairių sąryšių atsirandantys skaičiai (pavyzdžiui, funkcijų reikšmės), dažnai sunku pasakyti. Perskaitę straipsnį, sužinosite, kodėl $\sin 1$, $\sin\frac{1}{n}$, $\cos 1$, $\cos\frac{1}{n}$ *nepriklauso racionaliųjų skaičių aibei.*

Straipsniuose [1] ir [2] elementariai įrodyta, kad $\cos 1^\circ$ iracionalus (taip pat iracionalios visos racionaliuoju laipsnių skaičiumi išreiškiamo argumento trigonometrinių funkcijų reikšmės — suprantama, išskyrus žinomas reikšmes: sinuso ir kosinuso 0, $\pm\frac{1}{2}$, ± 1, tangento ir kotangento 0 ir ± 1). Šio straipsnio tikslas — parodyti, kaip galima elementariai įsitikinti, kad $\sin 1$ ir $\cos 1$, taip pat ir $\sin\frac{1}{n}$ bei $\cos\frac{1}{n}$, $n \in N$ (atkreipiame dėmesį — dabar argumentas matuojamas radianais!), iracionalios.

Iš pradžių įrodysime vadinamąsias Teiloro nelygybes funkcijoms $\sin x$ ir $\cos x$ $(0 < x < \frac{\pi}{2})$:

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots - \frac{x^{4m-1}}{(4m-1)!} < \sin x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots - \frac{x^{4m-1}}{(4m-1)!} + \frac{x^{4m+1}}{(4m+1)!} \quad (1)$$

ir

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots - \frac{x^{4m-2}}{(4m-2)!} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots - \frac{x^{4m-2}}{(4m-2)!} + \frac{x^{4m}}{(4m)!} \quad (2)$$

(plg. [3], p. 296).

Įrodyti jas papraščiau, negu sugalvoti. Pradėkime nuo nelygybės $\sin x < x$ įrodymo. Kadangi funkcijos $x - \sin x$ išvestinė $(x - \sin x)' = 1 - \cos x$ teigiama, tai funkcija didėja, $x - \sin x > 0 - \sin 0$, t. y. $\sin x < x$. Panašiai $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2!}$, nes išvestinė $(\cos x - 1 + \frac{x^2}{2!})' = -\sin x + x$ teigiama (jau įrodyta!), todėl $\cos x - 1 + \frac{x^2}{2!} > \cos 0 - 1 + \frac{0^2}{2!}$, t. y. $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2!}$. Vėl $\sin x > x - \frac{x^3}{3!}$, nes $(\sin x - x + \frac{x^3}{3!})' = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2!} > 0$. Dabar aišku, kad $\cos x < 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$, nes išvestinė $(-\cos x + 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!})' = \sin x - x + \frac{x^3}{3!}$ teigiama. Tęsdami toliau gauname nelygybes (1) ir (2).

Skaitytojui gali būti įdomu pasižiūrėti, kaip atrodytų „griežtas" įrodymas matematinės indukcijos metodu.

Nesunku įsitikinti, kad (1) nelygybę galima užrašyti taip:

$$(-1)^{n+1}\Big(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} - \sin x\Big) > 0 \quad (3)$$

(iš tikrųjų, kai $n = 2m$, gauname kairiąją nelygybę, o kai $n = 2m + 1$ — dešiniąją).

Panašiai (2) nelygybę galima užrašyti taip:

$$(-1)^n\Big(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}-\cos x\Big)>0 \tag{4}$$

(kai $n=2m$, gauname dešiniąją nelygybę, o kai $n=2m-1$, gauname kairiąją).

Su $n=1$ nelygybės (3) ir (4) virsta atitinkamai nelygybėmis $\sin x<x$ ir $\cos x>1-\frac{x^2}{2!}$, kurios jau įrodytos. Tarkime, kad jos teisingos su $n=k$:

$$(-1)^{k+1}\Big(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots+(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}-\sin x\Big)>0, \tag{5}$$

$$(-1)^k\Big(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots+(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}-\cos x\Big)>0. \tag{6}$$

Įrodykime, kad jos teisingos ir su $n=k+1$, t.y.

$$(-1)^k\Big(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots+(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}-\sin x\Big)>0, \tag{7}$$

$$(-1)^{k+1}\Big(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots+(-1)^{k+1}\frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}-\cos x\Big)>0. \tag{8}$$

Iš tikrųjų, (7) nelygybės kairiosios pusės išvestinė lygi $(-1)^k(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots+(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}-\cos x)$ ir remiantis (6) nelygybe teigiama. Todėl (7) nelygybės kairioji pusė — didėjanti funkcija, taigi jos reikšmė taške x didesnė už reikšmę taške 0, lygią nuliui. (7) nelygybė įrodyta.

Panašiai (8) nelygybės kairiosios pusės išvestinė lygi (7) nelygybės kairiajai pusei (nes $(-1)^{k+2}=(-1)^k$), taigi remiantis (7) nelygybe yra teigiama. Todėl (8) nelygybės kairėje esanti x funkcija didėja ir yra didesnė už 0 — reikšmę taške 0. (8) nelygybė įrodyta.

Remiantis matematinės indukcijos principu, (3) ir (4) (taigi ir (1) bei (2)) nelygybės įrodytos su visais n.

Dabar mes jau visiškai pasirengę įrodyti, kad $\sin 1$ ir $\cos 1$ yra iracionalieji skaičiai. Imdami (1) ir (2) formulėse $x=1$, gauname:

$$1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\dots-\frac{1}{(4m-1)!}<\sin 1<1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\dots-\frac{1}{(4m-1)!}+\frac{1}{(4m+1)!}, \tag{9}$$

$$1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\dots-\frac{1}{(4m-2)!}<\cos 1<1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\dots-\frac{1}{(4m-2)!}+\frac{1}{(4m)!}. \tag{10}$$

Tarkime, kad $\sin 1$ yra racionalusis skaičius, $\sin 1=\frac{p}{q}$ $(p,q\in N)$. Parašykime (9) nelygybę būtent su $m=q$, o vietoje $\sin 1$ įrašykime $\frac{p}{q}$:

$$1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\dots-\frac{1}{(4q-1)!}<\frac{p}{q}<1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\dots-\frac{1}{(4q-1)!}+\frac{1}{(4q+1)!}.$$

Padauginkime šią nelygybę iš $(4q+1)!$:

$$(4q+1)!-\frac{(4q+1)!}{3!}+\dots-\frac{(4q+1)!}{(4q-1)!}<4p(4q-1)!(4q+1)<(4q+1)!-\dots-\frac{(4q+1)!}{(4q-1)!}+1.$$

Matome, kad kairioji nelygybės pusė lygi sveikajam skaičiui, o dešinioji — vienetu didesniam skaičiui. Gavome, kad sveikasis skaičius $4p(4q-1)!(4q+1)$ atsidūrė tarp dviejų gretimų sveikųjų skaičių, o taip būti negali. Prieštara reiškia, kad mūsų prielaida dėl skaičiaus sin 1 racionalumo buvo neteisinga. Vadinasi, sin 1 yra iracionalusis skaičius.

Panašiai įrodome ir cos 1 iracionalumą. Tarkime, kad cos 1 racionalus, t. y. $\cos 1 = \frac{p}{q}$. Tada (10) nelygybėje imdami $m = q$ gauname:

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \dots - \frac{1}{(4q-2)!} < \frac{p}{q} < 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \dots - \frac{1}{(4q-2)!} + \frac{1}{(4q)!}.$$

Dauginame nelygybę iš $(4q)!$:

$$(4q)! - \frac{(4q)!}{2!} + \frac{(4q)!}{4!} - \dots - \frac{(4q)!}{(4q-2)!} < 4p(4q-1)! < (4q)! - \frac{(4q)!}{2!} + \frac{(4q)!}{4!} - \dots - \frac{(4q)!}{(4q-2)!} + 1.$$

Vėl sveikasis skaičius $4p(4q-1)!$ atsidūrė tarp dviejų gretimų sveikųjų skaičių, o taip būti negali. Prieštara.

Kiek netikėta, kad elementaraus sin 1 ir cos 1 iracionalumo įrodymo literatūroje aptikti nepavyko. O štai e iracionalumo įrodymą nesunku rasti elementariosios matematikos enciklopedijose ir net vadovėliuose (žr., pavyzdžiui, [3]).

Pasvarstykime, ką dar galima teigti remiantis sin 1 ir cos 1 iracionalumu. Visų pirma iš to visiškai neišplaukia, kad sin 2 ar cos 2 yra iracionalūs. Iš tikrųjų, jeigu $\sin\alpha$ yra iracionalus, tai nebūtinai $\sin 2\alpha$ bus racionalus: pavyzdžiui, $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ iracionalus, bet $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ racionalus. Panašiai $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ iracionalus, bet $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ racionalus.

Kita vertus, jeigu $\cos\alpha$ racionalus, tai racionalus ir $\cos n\alpha$. Iš tikrųjų, jeigu $\cos\alpha$ racionalus, tai racionalus ir $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$. Bet tada racionalus ir $\cos 3\alpha$, nes $\cos 3\alpha = (\cos 3\alpha + \cos\alpha) - \cos\alpha = 2\cos 2\alpha\cos\alpha - \cos\alpha$. Racionalus ir $\cos 4\alpha$, nes $\cos 4\alpha = (\cos 4\alpha + \cos 2\alpha) - \cos 2\alpha = 2\cos 3\alpha\cos\alpha - \cos 2\alpha$ ir t. t. Taigi racionalus ir $\cos n\alpha = \cos n\alpha + \cos(n-2)\alpha - \cos(n-2)\alpha = 2\cos(n-1)\alpha\cos\alpha - \cos(n-2)\alpha$ (matematinė indukcija!).

Iš šio fakto iš karto išplaukia, kad $\cos\frac{1}{n}$ yra iracionalus. Iš tikrųjų, jeigu $\cos\frac{1}{n}$ būtų racionalus, tai racionalus būtų ir $\cos(n\cdot\frac{1}{n}) = \cos 1$, o taip nėra.

Nepavyksta panašiai įrodyti, jog $\sin\frac{1}{n}$ yra iracionalus (nes jeigu $\sin\alpha$ racionalus, tai dar nebūtinai $\sin n\alpha$ racionalus). Bet galima vėl remtis (1) nelygybe. Tarkime priešingai, kad $\sin\frac{1}{n}$ racionalus, $\sin\frac{1}{n} = \frac{p}{q}$, ir imkime (1) nelygybėje $x = \frac{1}{n}$, $m = q$. Tada

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{3!n^3} + \frac{1}{5!n^5} - \dots - \frac{1}{(4q-1)!n^{4q-1}} < \frac{p}{q} < \frac{1}{n} - \frac{1}{3!n^3} + \dots - \frac{1}{(4q-1)!n^{4q-1}} + \frac{1}{(4q+1)!n^{4q+1}}.$$

Padauginus šią nelygybę iš $(4q+1)!n^{4q+1}$, sveikasis skaičius $4p(4q-1)!(4q+1)n^{4q+1}$ atsiduria tarp dviejų gretimų sveikųjų skaičių

$$N = (4q+1)!n^{4q} - \frac{(4q+1)!n^{4q-2}}{3!} + \frac{(4q+1)!n^{4q-4}}{5!} - \dots - \frac{(4q+1)!n^2}{(4q-1)!}$$

ir $N+1$, o taip būti negali.

Žinoma, panašiai galima buvo įrodinėti ir $\cos\frac{1}{n}$ iracionalumą.

Deja, šitokiu būdu nepavyksta įrodyti, kad, sakysime, sin 2 ar $\cos\frac{2}{7}$ iracionalus, nors kitais metodais galima įrodyti, kad reikšmės $\sin n$, $\cos n$, $\operatorname{tg} n$ ir netgi apskritai $\sin r$, $\cos r$, $\operatorname{tg} r$, kai r — racionalusis skaičius ($r \neq 0$), visada iracionalios. Bet tai jau kur kas sunkesnis uždavinys.

Grįžkime prie skaičiaus e. Straipsnyje [4] pademonstravome, kaip remiantis ribų teorija įrodoma, kad skaičius e iracionalus. Vis dėlto paprasčiausia remtis išvestinėmis.

Įrodykime Teiloro nelygybę ($x > 0$) funkcijai e^{-x} (funkcijai e^x ji būtų gerokai sudėtingesnė, žr. [3]):

$$1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \dots - \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} < e^{-x} < 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \dots - \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \tag{11}$$

Jos įrodymas visiškai panašus į (1) ir (2) nelygybių įrodymą. Kadangi $e^{-x} < 1$, tai funkcijos $f(x) = e^{-x} - 1 + x$ išvestinė $-e^{-x} + 1$ teigiama, todėl $e^x - 1 + x > f(0) = 0$, t. y. $1 - x < e^{-x}$. Bet funkcijos $e^{-x} - 1 + x - \frac{x^2}{2!}$ išvestinė $-e^{-x} + 1 - x$ neigiama, todėl $e^{-x} - 1 + x - \frac{x^2}{2!} < 0$, ir $e^{-x} < 1 - x + \frac{x^2}{2!}$. Tęsdami ir gauname (11) formulę. Jeigu įrodinėtume ją „griežtai“, matematinės indukcijos metodu, tai formulę patogu užsirašyti taip:

$$(-1)^m\Big(1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \dots + (-1)^m \frac{x^m}{m!} - e^{-x}\Big) > 0 \tag{12}$$

(kai $m = 2n - 1$, gauname kairiąją (11) nelygybės pusę, o kai $m = 2n$, — dešiniąją). Kai $m = 1$, nelygybė $1 - x < e^{-x}$ jau įrodyta. Jeigu ji jau įrodyta su m, tai ji teisinga ir su $m + 1$:

$$(-1)^{m+1}\Big(1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \dots + (-1)^m \frac{x^m}{m!} + (-1)^{m+1} \frac{x^{m+1}}{m!} - e^{-x}\Big) > 0.$$

Iš tikrųjų, paskutinės nelygybės kairioji pusė didėja, nes jos išvestinė teigiama — tai (12) nelygybės kairioji pusė.

Dabar imkime (11) nelygybėje $x = 1$:

$$1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots - \frac{1}{(2n-1)!} < e^{-1} < 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots - \frac{1}{(2n-1)!} + \frac{1}{(2n)!}. \tag{13}$$

Iš jos išplaukia, kad e — iracionalusis skaičius. Tarkime priešingai — kad e racionalus, $e = \frac{q}{p}$ ($q, p \in N$). Tada $e^{-1} = \frac{p}{q}$. Parašę (13) nelygybę su $n = q$, gauname

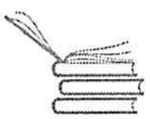
$$1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots - \frac{1}{(2q-1)!} < \frac{p}{q} < 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots - \frac{1}{(2q-1)!} + \frac{1}{(2q)!}.$$

Padauginkime nelygybę iš $(2q)!$. Tada

$$(2q)! - \frac{(2q)!}{1!} + \frac{(2q)!}{2!} - \dots - \frac{(2q)!}{(2q-1)!} < 2p(2q-1)! < (2q)! - \frac{(2q)!}{1!} + \frac{(2q)!}{2!} - \dots - \frac{(2q)!}{(2q-1)!} + 1.$$

Kairioji ir dešinioji nelygybės pusės yra du gretimi sveikieji skaičiai, ir tarp jų negali įsiterpti sveikasis skaičius. Gavome prieštarą.

Įrodžius e iracionalumą, iš karto aišku, kad taip pat iracionalūs yra skaičiai $e^{\frac{1}{n}}$, $n \in Z$ (t. y. skaičiai $\frac{1}{e}$, $\sqrt{e}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{e}}$ ir pan.). Deja, įrodyti e^n (tuo pačiu ir e^r, $r \in Q$) iracionalumą daug sunkiau.



1. J. Mačys, Kodėl cos 17° iracionalus?, *Alfa plius omega*, **1**, 75–77, 2002.
2. J. Mačys, Kodėl cos $\frac{180^\circ}{17}$ iracionalus?, *Alfa plius omega*, **2**, 62–64, 2002.
3. N. Vilenkinas, O. Ivaševas-Musatovas, S. Švarcburdas, *Algebra ir matematinė analizė. 10–12 klasei. Vadovėlis mokykloms su sustiprintu matematikos mokymu*, Šviesa, Kaunas, 1987, 1989.
4. J. Mačys, Kodėl skaičius e iracionalus?, *Alfa plius omega*, **3**, 56–61, 2002.