$\alpha + \omega$, 2003, Nr. 2, 6–11

# *Dirichlė principas*

Vytautas Narmontas

*Kiekvienam aišku: jei 5 triušiai patalpinti į 4 narvelius, tai bent viename narvelyje yra daugiau nei vienas triušis. Taigi visi žinome svarbų matematinių samprotavimų elementą, pravartų ir moksleiviams, ir mokslininkams. Straipsnyje skaitytojas ras daug šio samprotavimo taikymo pavyzdžių ir pajus malonumą viską iki galo supratęs.*

Dirichlė principas pavadintas įžymaus vokiečių matematiko Pėterio Gustavo Ležiono-Dirichlė (Peter Gustav Lejeune-Dirichlet, 1805–1859) vardu. 1837 metais P. G. Dirichlė pavyko įrodyti, kad aritmetinėje progresijoje, kurios pirmas narys ir skirtumas yra tarpusavyje pirminiai skaičiai, yra be galo daug pirminių skaičių. Jis pirmasis įrodė paskutinę Ferma teoremą, kai $n = 5$. Reikšmingiausi šio mokslininko darbai atlikti matematinės analizės (Dirichlė konvergavimo požymis, Dirichlė eilutės), mechanikos ir matematinės fizikos (Dirichlė principas harmoninių funkcijų teorijoje) bei skaičių teorijos srityse.

Spręsdami įrodymo uždavinius, kartais naudojamės Dirichlė principu, kuris dažnai pateikiamas žaisminga forma: *jei į n narvelių yra uždaryta daugiau kaip n triušių, tai bent viename narvelyje bus daugiau negu vienas triušis.*

Akivaizdus ir bendresnis Dirichlė principas: jei į $n$ narvelių yra uždaryta daugiau kaip $n \times k$ triušių, tai bent viename narvelyje bus daugiau negu $k$ triušių.

Galima pateikti ir abstraktesnę Dirichlė principo formuluotę. Tegu $X$ ir $Y$ — dvi baigtinės aibės, aibės $X$ elementų skaičius didesnis už aibės $Y$ elementų skaičių, $f$ — funkcija, kurios apibrėžimo sritis yra aibė $X$, o reikšmių sritis — $Y$. Tada yra du skirtingi elementai $x \in X$, $x' \in X$, su kuriais $f(x) = f(x')$.

Dirichlė principą galima taikyti ir begalinėms aibėms, turinčioms tūrį (plotą, ilgį): duota $n$ aibių, kiekvienos iš jų tūris (plotas, ilgis) didesnis arba lygus 1. Jei visos šios aibės yra vienos aibės, kurios tūris (plotas, ilgis) mažesnis už $n$, poaibiai, tai mažiausiai dvi iš duotųjų $n$ aibių turi bent vieną bendrą tašką.

Pats Dirichlė principas — visiškai akivaizdus teiginys, kitaip sakant, jokio principo čia ir nėra. Juo labiau niekuo čia dėtas ir P. G. Dirichlė. Bet kadangi tokio tipo samprotavimai padeda išspręsti įvairiausius uždavinius, tai buvo patogu suteikti jiems pavadinimą. Vienas iš matematikų, studijuodamas Dirichlė darbus, juokais tokius samprotavimus pavadino jo vardu... Ir pavadinimas (jau nebe juokais) prigijo (tik niekas nežino, ar tokia „autoryste“ apsidžiaugtų pats Dirichlė). Beje, ne visur pavadinimas ir prigijo — rimtesnėse enciklopedijose jis pavadinamas *dėžių principu*, populiarioje literatūroje — *triušių ir narvelių principu.* O anglai niekada nemini Dirichlė, bet triušius pakeičia balandžiais (*pigeon-hole principle*). Taigi Dirichlė principas visai paprastas, tik visa gudrybė yra atspėti, kada ir kaip jį taikyti sprendžiant uždavinius — juose juk niekas nekalba nei apie triušius, nei apie narvelius. Žinoma, jeigu iš anksto numanome (ar žinome, kaip kad toliau nagrinėjamuose uždaviniuose), kad samprotauti reikia remiantis juo, tai atspėti, ką laikyti narveliais, o ką — triušiais, žymiai lengviau. Ir tai čia reikia treniruočių ir įgūdžių.

Beje, sprendžiant uždavinius (taip pat ir toliau pateikiamus) praverčia tokia Dirichlė principo forma (ją [5] knygos redaktorius pavadino *vidurkio principu*): jei $n$ skaičių suma lygi $S$, tai tarp šių skaičių yra skaičius, ne didesnis už $\frac{S}{n}$, ir skaičius, ne mažesnis už $\frac{S}{n}$.

**1 uždavinys.** *Katinas Bazilijus Buratinui pažadėjo atskleisti didelę paslaptį, jei jis iš skaičių $+1$, $0$, $-1$ sudarys tokį antimagišką $n \times n$ kvadratą, kad kiekvienoje eilutėje, kiekviename stulpelyje ir įstrižainėse esančių skaičių sumos būtų skirtingos. Padėkite Buratinui, jei tai įmanoma.*

*Sprendimas.* Tarkime, kad toks kvadratas sudarytas. Iš skaičių $+1$, $0$, $-1$ sudarytos sumos, kuriose yra po $n$ dėmenų, gali įgyti sveikąsias reikšmes nuo $-n$ iki $+n$ — iš viso $(2n+1)$ reikšmių. Kvadrate yra $n$ eilučių, $n$ stulpelių ir 2 įstrižainės — iš viso $(2n+2)$ sumų. Pagal Dirichlė principą bent dvi iš šių sumų bus vienodos. Gaila, bet Buratinui padėti neįmanoma.

**2 uždavinys.** *Kvadrate* $4\times4$ *yra* 15 *taškų. Įrodykite, kad iš jo galima iškirpti kvadratėlį* $1\times1$, *kuriame nebūtų nė vieno iš duotų* 15 *taškų.*

*Sprendimas.* Kvadratą $4 \times 4$ galima padalyti į šešiolika kvadratėlių $1 \times 1$. Kadangi yra 15 taškų, tai pagal Dirichlė principą nors viename kvadratėlyje nebus nė vieno taško.

**3 uždavinys.** *Kube, kurio briaunos ilgis lygus* 1, *yra* 2003 *musės. Įrodykite, kad yra trys musės, kurios telpa į spindulio* $\frac{1}{11}$ *sferą.*

*Sprendimas.* Padalykime kubą į 1000 lygių kubelių, kurių briaunos ilgis yra $0,1$. Pagal Dirichlė principą bus kubelis, kuriame bus mažiausiai 3 musės. Apie šį kubelį apibrėžto rutulio spindulys lygus $\frac{\sqrt{3}}{20}$. Kadangi $\frac{1}{11} > \frac{\sqrt{3}}{20}$, tai 3 musės tikrai bus spindulio $\frac{1}{11}$ rutulyje.

**4 uždavinys.** *Šešiasdešimtženklio skaičiaus užraše nėra nulių. Įrodykite, kad jame galima išbraukti keletą skaitmenų taip, kad gautasis natūralusis skaičius dalytųsi iš* 1001.

*Sprendimas.* Pagal Dirichlė principą skaičiaus užraše bent vienas skaitmuo kartojasi mažiausiai 6 kartus, nes $60 = 9 \times 5 + 15$. Išbraukę visus kitus skaitmenis, gausime šešiaženklį skaičių $\overline{aaaaaa}$, kuris dalijasi iš $111111 = 111 \times 1001$.

**5 uždavinys.** *Įrodykite, kad tarp* 65 *natūraliųjų skaičių visada yra* 9 *skaičiai, kurių suma dalijasi iš* 9.

*Sprendimas.* Jeigu tarp duotų 65 skaičių yra 9 skaičiai, kurių dalybos iš 9 liekanos įgyja 9 skirtingas reikšmes, tai šių skaičių suma dalysis iš 9, nes jų dalybos iš 9 liekanų suma bus $0+1+2+\cdots+8=36$. Jeigu tokių 9 skaičių nėra, tai duotų skaičių dalybos iš 9 liekanos gali įgyti daugiausiai 8 skirtingas reikšmes. Kadangi $65 = 8\times8+1$, tai pagal Dirichlė principą bus bent 9 skaičiai, kurių dalybos iš 9 liekanos bus vienodos. Šių skaičių suma dalysis iš 9.

**6 uždavinys.** *Vienetiniame kvadrate pažymėtas* 101 *taškas, ir jokie* 3 *taškai nėra vienoje tiesėje. Įrodykite, kad yra trikampis, kurio viršūnės yra duoti taškai, o plotas ne didesnis už* $0,01$.

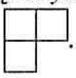
*Sprendimas.* Kvadratą padalykime į 50 lygių stačiakampių $0,1 \times 0,2$. Pagal Dirichlė principą bent viename iš jų bus mažiausiai trys duoti taškai. Trikampio, kurio viršūnės yra šie taškai, plotas yra ne didesnis už pusę šio stačiakampio ploto, t. y. už $0,2 \times 0,1 \times 0,5 = 0,01$ (pabandykite pastarąjį teiginį įrodyti).

**7 uždavinys.** *Ant apvalaus stalo krašto vienodais atstumais yra išdėstytos* $n$ *valstybių vėliavos, o prie stalo sėdi po vieną kiekvienos šalies atstovą. Nė vienas atstovas nesėdi prie savo šalies vėliavos. Ar galima stalą pasukti taip, kad bent du atstovai sėdėtų prie savo šalies vėliavos?*

*Sprendimas.* Yra $(n-1)$ būdų pasukti stalą, kad pasikeistų vėliavų ir atstovų padėtis. Kiekvienam atstovui priskirkime stalo pasukimą, po kurio atstovai bus prie savo šalies vėliavos. Atstovų yra $n$, o skirtingų pasukimų yra $(n-1)$. Pagal Dirichlė principą bent dviem atstovams priskirti stalo pasukimai bus vienodi.

**8 uždavinys.** *Ar galima* $1{,}5 \times 1{,}5$ *kvadratą uždengti trimis lygiais* $1 \times 1$ *kvadratais?*

*Sprendimas.* Kvadratu $1 \times 1$ negalima uždengti dviejų kvadrato $1{,}5 \times 1{,}5$ viršūnių, nes didžiausias atstumas tarp kvadrato $1 \times 1$ taškų yra $\sqrt{2} < 1{,}5$. Todėl kvadratą $1{,}5 \times 1{,}5$ uždengti reikės mažiausiai keturių kvadratų $1 \times 1$.

**9 uždavinys.** *Kvadrate* $5 \times 5$ *yra* 16 *nudažytų langelių. Įrodykite, kad jame yra nudažytas „kampas"* .

*Sprendimas.* Tarkime, kad kvadrate $5 \times 5$ nėra nudažyto kampo. Tada bet kuriame kvadrate $2 \times 2$ yra ne mažiau kaip du nenudažyti langeliai. Tuomet kairiojoje pusėje esančio kvadrato $5 \times 5$ kryžiukais pažymėtoje dalyje yra ne mažiau kaip 8 nenudažyti langeliai, o kryžiukais nepažymėtuose langeliuose — ne daugiau kaip 1 nenudažytas.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| × | × | × | × | |
| × | × | × | × | |
| × | × | × | × | |
| × | × | × | × | |
| | | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| • | • | • | • | • |
| • | | | | • |
| • | | | | • |
| • | | | | • |
| • | • | • | • | • |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | × | × | × | × |
| | × | × | × | × |
| | × | × | × | × |
| | × | × | × | × |

Analogiškai dešiniojoje pusėje kvadrato $5 \times 5$ kryžiukais nepažymėtuose langeliuose gali būti ne daugiau kaip 1 nenudažytas langelis. Tada viduriniame kvadrate tarp taškiukais pažymėtų langelių yra daugiausiai du nenudažyti. Bet tarp tų langelių yra keturi kampai, todėl bent du iš jų yra nudažyti. Prieštara.

**10 uždavinys.** *Ar tarp* 5 *natūraliųjų skaičių visada yra du, kurių kvadratų skirtumas dalijasi iš* 7*?*

*Sprendimas.* Natūraliojo skaičiaus kvadrato dalybos iš 7 liekanos gali būti 0, 1, 2 ir 4. Pagal Dirichlė principą mažiausiai dviejų duotų skaičių kvadratų dalybos iš 7 liekanos bus lygios, ir šių kvadratų skirtumas dalysis iš 7.

**11 uždavinys.** *Įrodykite, kad tarp natūraliųjų skaičių* $2-1$, $2^2-1$, $2^3-1, \ldots, 2^n-1$ *(*$n$ *— nelyginis ir* $n > 1$*) yra bent vienas skaičius, kuris dalijasi iš* $n$.

*Sprendimas.* Tarkime, kad nė vienas iš duotų $n$ skaičių nesidalija iš $n$. Tada tarp $n$ skaičių yra bent du, kurių dalybos iš $n$ liekanos sutampa. Tarkime, kad tai yra skaičiai $2^s-1$ ir $2^t-1$ ($2^s-1 > 2^t-1$). Tada skaičius $(2^s-1)-(2^t-1) = 2^s-2^t = 2^t(2^{s-t}-1)$ dalijasi iš $n$. Kadangi $n$ ir $2^t$ yra tarpusavyje pirminiai, tai skaičius $2^{s-t}-1$ dalijasi iš $n$ ($1 \leqslant s-t < n$). Prieštara.

**12 uždavinys.** *Duoti du to paties kintamojo daugianariai. Kiekvienas iš jų yra keturių nelyginio laipsnio, ne didesnio kaip* 15, *vienanarių suma. Ar šių daugianarių sandauga visada turės panašių narių?*

*Sprendimas.* Sudauginę duotus daugianarius, gausime $4 \times 4 = 16$ dėmenų, kurių laipsniai gali įgyti daugiausiai 15 skirtingų reikšmių: 2, 4, 6, ..., 30. Pagal Dirichlė principą tarp jų bus bent du vienodi.

**13 uždavinys.** *Ar galima kubo viršūnes sunumeruoti natūraliaisiais skaičiais nuo* 1 *iki* 8 *taip, kad kiekvienos kubo briaunos galuose esančių skaičių sumos būtų skirtingos?*

*Sprendimas.* Sumos gali įgyti 13 skirtingų reikšmių: 3, 4, 5, ..., 15. Tarkime, kad tarp sumų yra $1+2=3$, $1+3=4$, $1+4=5$. Tada negalime gauti sumos, lygios 6, nes 1 ir 5, 2 ir 4 yra ne tos pačios briaunos galuose. Vadinasi, iš sumų reikšmių 3, 4, 5, 6 vienos, šiuo atveju 6, negalima gauti. Panašiai įrodoma, kad iš sumų reikšmių 12, 13, 14, 15 vienos gauti negalima. Vadinasi, skirtingų sumų reikšmių yra ne daugiau kaip 11, o kubo briaunų yra 12. Pagal Dirichlė principą bent dvi sumos įgis tą pačią reikšmę.

**14 uždavinys.** *Įrodykite, kad bet kuriems tarpusavyje pirminiams natūraliesiems skaičiams* $a$ *ir* $b$ *galima rasti tokį natūralųjį skaičių* $n$, *kad skirtumas* $a^n-1$ *dalytųsi iš* $b$.

*Sprendimas.* Pagal Dirichlė principą tarp skaičių $1, a^1, a^2, a^3, \ldots, a^b$ yra bent du, kurių dalybos iš $b$ liekanos vienodos. Šių skaičių skirtumas dalijasi iš $b$. Tegu tai yra skaičiai

$a^u$ ir $a^z$, čia $u$ ir $z$ — natūralieji, $u > z$. Tada skaičius $a^u - a^z = a^z(a^{u-z} - 1)$ dalijasi iš $b$. Kadangi $a$ ir $b$ tarpusavyje pirminiai, tai skaičius $a^{u-z} - 1$ dalijasi iš $b$. Vadinasi, tokį skaičių $n$ visada galima rasti.

**15 uždavinys.** *Įrodykite, kad iš bet kurių* 52 *natūraliųjų skaičių visada galima išrinkti du, kurių suma arba skirtumas dalytųsi iš* 100.

*Sprendimas.* Visas galimas skaičių dalybos iš 100 liekanas suskirstykime į grupes: $\{0\}$, $\{1; 99\}$, $\{2; 98\}$, ..., $\{49; 51\}$, $\{50\}$. Kadangi grupių yra 51, o skaičių — 52, tai pagal Dirichlė principą bus bent du skaičiai, kurių dalybos iš 100 liekanos pateks į tą pačią grupę. Jeigu abi dalybos iš 100 liekanos lygios, tai iš 100 dalysis šių skaičių skirtumas, o jei skaičių dalybos iš 100 liekanos skirtingos, tai iš 100 dalysis šių skaičių suma.

**16 uždavinys.** *Ar galima skaičius* 0, 1, 2, 3, ..., 9 *išdėlioti ratu taip, kad bet kurie du gretimi skaičiai skirtųsi* 3, 4 *arba* 5 *vienetais*?

*Sprendimas.* Pastebėsime, kad bet kurie du iš skaičių 0, 1, 2, 8, 9 negali būti greta. Skaičius 7 negali būti nė vienoje iš likusių penkių vietų, nes šalia jo iš užrašytų skaičių tegali būti tik 2. Taigi skaičių norimu būdu išdėlioti negalima.

**17 uždavinys.** *Duoti aštuoni natūralieji skaičiai* $a_1, a_2, \ldots, a_8$, *be to,* $a_1 < a_2 < \cdots < a_8 < 15$. *Įrodykite, kad tarp visų galimų skirtumų* $a_i - a_k$ $(k < i)$ *yra mažiausiai trys vienodi.*

*Sprendimas.* Iš viso skirtumų yra $\frac{8\times7}{2} = 28$. Jie gali įgyti reikšmes: 1, 2, 3, 4, ..., 14. Reikšmę 14 gali įgyti tik vienas skirtumas: $15 - 1 = 14$. Galimi du atvejai:

1) tarp skirtumų yra reikšmė 14,
2) tarp skirtumų reikšmės 14 nėra.

Jeigu tarp skirtumų yra reikšmė 14, tai ji tik viena. Likusieji 27 skirtumai gali įgyti daugiausiai trylika skirtingų reikšmių. Pagal Dirichlė principą bent trys skirtumai bus vienodi, nes $27 = 2 \times 13 + 1$. Jeigu tarp skirtumų nėra reikšmės 14, tai 28 skirtumai įgis daugiausia trylika skirtingų reikšmių. Pagal Dirichlė principą tarp šių skirtumų bus bent trys vienodi, nes $28 = 2 \times 13 + 2$.

**18 uždavinys.** *Ar galima taisyklingojo* 45*-kampio viršūnėse skaitmenis* 0, 1, 2, ..., 9 *išdėstyti taip, kad kiekvienai skirtingų skaitmenų porai būtų kraštinė, kurios galai sunumeruoti šiais skaitmenimis?*

*Sprendimas.* Skaitmuo $a$ sudaro devynias poras su kiekvienu iš likusių devynių skaitmenų. Kad visoms šioms poroms būtų kraštinė, kurios galai sunumeruoti poroje esančiais skaitmenimis, reikia, kad skaitmuo $a$ būtų bent penkiose viršūnėse. Kadangi skaitmenų yra 10, tai jiems visiems prireiks mažiausiai $5 \times 10 = 50$ vietų, todėl uždavinio sąlygą tenkinančio išdėstymo nėra.

**19 uždavinys.** *Įrodykite, kad tarp* 39 *vienas po kito einančių natūraliųjų skaičių yra skaičius, kurio skaitmenų suma dalijasi iš* 11.

*Sprendimas.* Tarp pirmųjų dvidešimties šių skaičių pagal Dirichlė principą yra bent du, kurių paskutinis skaitmuo yra nulis. Bent vieno iš iš tų skaičių užrašė prieš nulį yra skaitmuo, nelygus 9. Šį skaičių pažymėkime $N$, o jo skaitmenų sumą — $S$. Tada skaičiai $N$, $N + 1$, $N + 2$, ..., $N + 9$, $N + 19$ yra tarp duotų 39 natūraliųjų skaičių, o jų skaitmenų sumos atitinkamai lygios $S$, $S+1$, $S+2$, ..., $S+10$. Tarp vienuolikos vienas po kito einančių natūraliųjų skaičių yra vienas, kuris dalijasi iš vienuolikos.

**20 uždavinys.** *Natūralieji skaičiai* $a$ *ir* $b$ $(b \geqslant 2)$ *yra tarpusavyje pirminiai. Įrodykite, kad yra toks natūralusis skaičius* $n$, *kad skaičiaus* $n \times a$ *dalybos iš* $b$ *liekana lygi* 1.

*Sprendimas.* Nagrinėkime skaičius: $1 \times a$, $2 \times a$, $3 \times a$, ..., $(b - 1) \times a$. Nė vienas iš jų nesidalija iš $b$. Tarkime, kad tarp jų nėra tokio skaičiaus, kurio dalybos iš $b$ liekana lygi 1. Tada juos dalydami iš $b$ galime gauti visas liekanas, išskyrus 0 ir 1, t. y. $(b - 2)$ skirtingų liekanų: 2, 3, ..., $b - 1$. Kadangi skaičių yra $(b - 1)$, o skirtingų liekanų — $(b - 2)$, tai pagal Dirichlė principą yra bent du skaičiai, kurių dalybos iš $b$ liekanos sutampa. Tegu tai bus skaičiai $(k \times a)$ ir $(m \times a)$,

$1 < k \leqslant b-1$, $1 \leqslant m < b-1$, $k > m$. Tada skaičius $k \times a - m \times a = (k-m) \times a$ dalijasi iš $b$. Taip būti negali, nes $0 < k - m < b$, o skaičiai $a$ ir $b$ yra tarpusavyje pirminiai. Gavome prieštarą.

**21 uždavinys.** *Languotame popieriuje pažymėti penki langelių linijų susikirtimo taškai. Įrodykite, kad yra atkarpa, jungianti tuos taškus ir einanti per langelių linijų susikirtimo tašką.*

*Sprendimas.* Įveskime stačiakampę koordinačių sistemą, kurios ašys sutaptų su langelių linijomis. Tada duotų taškų koordinatės gali būti: (lyginė; lyginė), (lyginė; nelyginė), (nelyginė; lyginė), (nelyginė; nelyginė). Pagal Dirichlė principą tarp penkių duotų taškų bus mažiausiai du, kurie pateks į vieną iš keturių „narvelių": (lyginė; lyginė), (lyginė; nelyginė), (nelyginė; lyginė), (nelyginė; nelyginė). Šiuos taškus jungiančios atkarpos vidurio taškas eis per langelių linijų susikirtimo tašką, nes šios atkarpos vidurio taško koordinatės bus sveikieji skaičiai.

**22 uždavinys.** *Kiekviena iš devynių tiesių kvadratą dalija į du keturkampius, kurių plotų santykis yra* 2 : 3. *Įrodykite, kad bent trys iš šių tiesių susikerta viename taške.*

*Sprendimas.* Kiekviena iš tiesių kvadratą dalija į du stačiakampius arba į dvi trapecijas. Kadangi gautų stačiakampių arba trapecijų plotų santykis yra 2 : 3, tai kiekviena šių tiesių tokiu pat santykiu dalija ir kvadrato vidurio liniją, kurią sudaro gautų trapecijų arba stačiakampių vidurio linijos. Tai nesunkiai įrodome, užrašę gautų trapecijų arba gautų stačiakampių plotų formules ir pasinaudoję tuo, kad gautų keturkampių plotų santykis yra 2 : 3. Taškų, kurie kvadrato vidurio linijas dalija santykiu 2 : 3, iš viso yra 4, o tiesių — 9. Pagal Dirichlė principą bus taškas, per kurį eis bent 3 tiesės.

**23 uždavinys.** *Fibonačio seka* 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... *apibrėžiama taip:* $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n \geqslant 3$, $n$ *— natūralusis. Ar tarp* 100 000 001 *pirmųjų šios sekos narių yra skaičius, kuris dalijasi iš* 10000?

*Sprendimas.* Nagrinėkime šios sekos narių dalybos iš 10 000 liekanas. Sekos $n$-ojo nario dalybos iš 10 000 liekaną pažymėkime $l_n$. Skirtingų liekanų yra 10 000, o skirtingų liekanų porų yra $10\,000 \times 10\,000 = 100\,000\,000$. Imkime liekanų poras: $(l_1, l_2)$, $(l_2, l_3)$, $(l_3, l_4)$, ..., $(l_{100000001}, l_{100000002})$. Pagal Dirichlė principą iš šių 100 000 001 liekanų porų mažiausiai dvi yra vienodos, t. y. $l_k = l_m$, $l_{k+1} = l_{m+1}$ ($k < 100\,000\,002$, $m < 100\,000\,002$, $k < m$). Iš sumos ir vieno iš dviejų dėmenų dalybos liekanų vienareikšmiškai nustatoma kito dėmens dalybos liekana, todėl $l_{k-1} = l_{m-1}$, $l_{k-2} = l_{m-2}$, ..., $l_2 = 1 = l_{m-k+2}$, $l_1 = 1 = l_{m-k+1}$. Aišku, kad $l_{m-k} = 0$.

**24 uždavinys.** *Idealios rutulio formos planetoje sausuma užima daugiau negu pusę planetos ploto. Įrodykite, kad yra rutulio skersmuo, jungiantis sausumą su sausuma.*

*Sprendimas.* Visą sausumą „nudažykime" žalia spalva, o visus taškus, kurie yra simetriški rutulio centro atžvilgiu, — raudonai. Pagal Dirichlė principą būtinai bus taškas, nudažytas dviem spalvomis. Per šį tašką ir eis ieškomas skersmuo, nes jo abu galai priklausys sausumai.

**25 uždavinys.** *Vienetiniame kvadrate* $ABCD$ *yra keletas apskritimų, kurių spindulių suma lygi* 0,6. *Įrodykite, kad yra tiesė, lygiagreti su* $AB$, *kuri turi bendrų taškų bent su dviem apskritimais. (Apskritimai gali kirstis, sutapti arba neturėti bendrų taškų.)*

*Sprendimas.* Visų apskritimų skersmenų suma lygi $2 \times 0{,}6 = 1{,}2$. Kraštinėje $BC$ suprojektuokime visų apskritimų skersmenis, lygiagrečius su atkarpa $BC$. Pagal Dirichlė principą bus toks kraštinės $BC$ taškas, kuris priklausys bent dviejų apskritimų skersmenų projekcijoms. Tiesė, einanti per šį tašką ir lygiagreti su $AB$, bus ieškomoji.

**26 uždavinys.** *Miškas yra skritulio, kurio spindulys lygus* 215 m, *formos. Atstumas tarp bet kurių dviejų šio miško medžių yra ne mažesnis* *už* 10 m. *Įrodykite, kad miške yra mažiau negu* 2003 *medžiai.*

*Sprendimas.* Tegu miške auga $n$ medžių. Apie kiekvieną medį apibrėžkime 5 m spindulio skritulį, kurio centre yra medis. Šie skrituliai nesusikerta ir visi yra skritulyje, kurio spindulys yra $215+5=220$ metrų. Pagal Dirichlė principą $\pi \times 5^2 \times n \leqslant \pi \times 220^2$. Gauname, kad $n \leqslant 1936$.

**27 uždavinys.** *Įrodykite, kad iškilajame keturkampyje, kurio perimetras lygus $P$, o plotas — $S$, visada telpa skritulys, kurio spindulys yra $\frac{S}{P}$.*

*Sprendimas.* Tegu $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ — duoto keturkampio kraštinių ilgiai. Tada $a_1+a_2+a_3+a_4=P$. Paimkime stačiakampį, kurio kraštinių ilgiai lygūs $P$ ir $S/P$, ir padalykime į $a_1 \times S/P$, $a_2 \times S/P$, $a_3 \times S/P$ ir $a_4 \times S/P$ stačiakampius. Kiekvieną gautą stačiakampį dedame iš vidaus prie atitinkamos duoto keturkampio kraštinės taip, kad jos sutaptų. Kadangi gautų stačiakampių plotų suma lygi $S$, tai pagal Dirichlė principą duotame keturkampyje bus taškas, kurio nedengs nė vienas iš stačiakampių, nes kai kurie stačiakampiai gali dengti vienas kitą, kai kurie gali „išlįsti“ už keturkampio ribų. Šis taškas ir bus skritulio centras.

**28 uždavinys.** *Komisija rinkosi* 40 *kartų. Kiekviename posėdyje buvo po* 10 *žmonių, be to, bet kurie du komisijos nariai kartu posėdžiavo tik vieną kartą. Įrodykite, kad komisijos narių skaičius didesnis už* 60.

*Sprendimas.* Tegu komisijos narių skaičius $n$ ne didesnis už 60. Kadangi $\frac{10\times 40}{n} > 6$, tai pagal Dirichlė principą bus žmogus, kuris dalyvavo bent 7 posėdžiuose. Visi žmonės, su kuriais jis susitiko, buvo skirtingi, o jų iš viso buvo $7 \times 9 = 63 > 59$. Prieštara.

**29 uždavinys.** *Įrodykite, kad tarp* 82 *vienspalvių kubelių visada galima rasti arba* 10 *ta pačia spalva, arba* 10 *skirtingomis spalvomis nudažytų kubelių.*

*Sprendimas.* Jei kubeliams nudažyti buvo panaudota ne mažiau kaip 10 skirtingų spalvų, tai tarp 82 kubelių bus 10 skirtingomis spalvomis nudažytų kubelių. Jei kubeliams nudažyti panaudotos ne daugiau kaip 9 skirtingos spalvos, tai pagal Dirichlė principą bus bent 10 kubelių, nudažytų ta pačia spalva.


1. *Квант*, 1973–2001.
2. Н.Б. Васильев, А.А. Егоров, *Задачи всесоюзных математических олимпиад*, Наука, 1988.
3. V. Gusevas, A. Orlovas, A. Rozentalis, *Užklasinis matematikos darbas* VI–VIII *klasėje*, Šviesa, 1982.
4. Autorių kolektyvas, *Matematika* 10. II *dalis*, TEV, 2002.
5. Autorių kolektyvas, *Matematika* 10. *Mokytojo knyga*, TEV, 2002.