$\alpha + \omega$, 2003, Nr. 2, 57–60

Ketvirtosios LJMM laidos mokymo programos apžvalga

A. Apynis (VU), E. Stankus (VU), J. Šinkūnas (VPU)
antanas.apynis@maf.vu.lt, eugenijus.stankus@maf.vu.lt, sinkunas@vpu.lt

Straipsnyje apžvelgiamos LJMM ketvirtosios laidos mokymo programos užduotys, pateikiami sunkesnių uždavinių sprendimai.

2003 metų balandžio mėnesį išleidome ketvirtąją Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos laidą. Iš 2001 metais įstojusių 900 moksleivių šiemet ją baigė 464 moksleiviai. Daugelis iš jų jau studentai. Didžiausias LJMM absolventų būrys papildė Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetą — į pirmąjį kursą įstojo 146 šios laidos absolventai.

Glaustai apžvelgsime per šiuos dvejus mokslo metus nagrinėtas temas ir pakomentuosime sunkesnių uždavinių sprendimus.

Pirmoji tema — skaičiavimo sistemos. Ją parengė Vilniaus universiteto docentas Gediminas Stepanauskas. Studijuodami teorinę medžiagą, moksleiviai susipažino su skaičiavimo sistemomis, gavo daug istorinių žinių, mokėsi spręsti įvairius skaičiavimo sistemų keitimo uždavinius. Tema, matyt, moksleiviams patiko, nes užduoties sprendimus atsiuntė beveik visi priimtieji LJMM klausytojai. Sunkiausiai sekėsi spręsti devintąjį uždavinį, todėl pateikiame jo sprendimą.

Uždavinys. *Yra žinoma dalumo taisyklė: dešimtainės sistemos skaičius dalijasi iš 9 tada ir tik tada, kai jo skaitmenų suma dalijasi iš 9. Įrodykite šios taisyklės analogą trejetainėje sistemoje: trejetainės sistemos skaičius dalijasi iš 2 tada ir tik tada, kai šio skaičiaus trejetainių skaitmenų suma dalijasi iš 2. Užrašykite šios taisyklės apibendrinimą n-tainei sistemai.*

Sprendimas. Pozicinės trejetainės sistemos skaičių, kurio skaitmenys yra $a, b, \dots, c, d$, galima užrašyti tokiu būdu: $a \cdot 3^n + b \cdot 3^{n-1} + \dots + c \cdot 3 + d$. Bet koks trejeto laipsnis yra nelyginis skaičius, todėl

$3^k = 2m+1$ ir $a \cdot 3^n + b \cdot 3^{n-1} + \dots + c \cdot 3 + d = a \cdot (2u+1) + b \cdot (2v+1) + \dots + c \cdot (2+1) + d = (2au + 2bv + \dots + 2c) + (a + b + \dots + c + d) = 2t + a + b + \dots + c + d.$

Pirmasis dėmuo dalijasi iš dviejų, todėl skaičiaus dalumą iš dviejų nulemia likusių dėmenų suma.

Taigi trejetainės sistemos skaičius dalijasi iš 2 tada ir tik tada, kai jo trejetainių skaitmenų suma $a + b + \dots + c + d$ dalijasi iš 2.

Apibendrinimas n-tainei sistemai: n-tainės sistemos skaičius dalijasi iš $(n-1)$ tada ir tik tada, kai jo n-tainių skaitmenų suma dalijasi iš $(n-1)$.

Antrosios eilės kreivių tema (ją parengė docentas Petras Vaškas) — įžanga į analizinę geometriją, galinti palengvinti pasirinkusių tiksliuosius mokslus pirmuosius studijų žingsnius. Moksleiviai turėjo galimybę susipažinti su kūgio pjūviais — parabole, hiperbole, apskritimu, elipse ir jų savybėmis. Studijuojant šią temą moksleiviams nepakako mokyklinių vadovėlių — teko atidžiai išnagrinėti pateiktą medžiagą ir dar paskaityti papildomai. Moksleiviams sunkiausiai sekėsi pavaizduoti apskritimo bei apibrėžtų apie apskritimą trikampio ir kvadrato lygiagrečiąsias projekcijas.

Vilniaus pedagoginio universiteto docentė Livija Maliaukienė LJMM klausytojams parengė temą „Įdomioji logika“. Ji supažindino moksleivius su istoriniais logikos uždaviniais, įvairiais paradoksais (garsiuoju barzdaskučio uždaviniu ir kt.), išdėstė teiginių logikos pradmenis, kurie leidžia efektyviai spręsti ir sudėtingesnius loginius uždavinius. Kiečiausias riešutas moksleiviams buvo šis uždavinys.

Uždavinys. *Penki draugai turi po vieną sūnų. Kiekvienas sūnus pasiskolino po knygą iš vieno savo tėvo draugų. Visų šių draugų pavardės panašios į profesijų pavadinimus, bet nė vieno iš jų pavardė neprimena jo paties profesijos. Kalvio sūnus paėmė Kalvelio knygą; jo pavardė primena Kalvelio sūnaus profesiją, taip pat jis bendrapavardis su tuo, kieno knygą paėmė Kalvelio sūnus. Žinoma, kad dailidės pavardė ne Puodžiūnas ir kad dailidė paėmė knygą iš Šikšniaus. Kokia stikliaus pavardė? (Pagal seną tradiciją sūnus paveldi savo tėvo profesiją.)*

Sprendimas. Nors uždavinys gana painus, bet jį nesunku išspręsti sudarius ir išanalizavus teiginių lentelę (joje atsakymai pažymėti žvaigždutėmis).

Pavardė / Profesija	Kalvelis	Dailidė	Puodžiūnas	Šikšnius	Stiklius
Kalvis			*		
Dailidė					*
Puodžiūnas	*				
Šikšnius		*			
Stiklius				*	

Su atvirkštinės funkcijos sąvoka susipažįstama mokykloje, tačiau sunkumų kyla net universitetų studentams. Ketvirtąja užduotimi, kurią parengė Vilniaus pedagoginio universiteto docentas Algimantas Pranas Urbonas, siekta giliau suvokti atvirkštinę funkciją, bandyta gvildenti atvirkštinės funkcijos egzistavimo klausimus. Teorinėje medžiagoje pateikta nemažai pavyzdžių, iliustruojančių, kaip įvairiais atvejais randama atvirkštinė funkcija. Mūsų moksleiviai šią užduotį sprendė nelengvai, o sunkiausiai — septintąjį uždavinį.

Uždavinys. *Su kuriomis a reikšmėmis $f(x) = ax^2 + 4x + 5$, $x \in [-2; 1]$, turi atvirkštinę funkciją?*

Sprendimas. Funkcija $y = ax^2 + 4x + 5$ (parabolė, kai $a \neq 0$) yra monotoninė ir turi atvirkštinę, kai parabolės viršūnės abscisė ($x = -\frac{2}{a}$) nepriklauso intervalui $(-2; 1)$, t. y. kai a tenkina sąlygas: $(-\frac{2}{a} \leqslant -2$ arba $-\frac{2}{a} \geqslant 1) \Rightarrow (\frac{a-1}{a} \leqslant 0$ arba $\frac{a+2}{a} \leqslant 0) \Rightarrow (0 < a \leqslant 1$ arba $-2 \leqslant a < 0)$. Kai $a = 0$, $f(x) = 4x + 5$ yra tiesinė funkcija, turinti atvirkštinę. Taigi $f(x) = ax^2+4x+5$, $x \in [-2; 1]$, turi atvirkštinę funkciją, kai $a \in [-2; 1]$.

Penktoji tema — „Optimizavimo uždaviniai“. Jos tikslas — pademonstruoti matematikos galimybes sprendžiant įvairius praktinius uždavinius ir kuriant matematinius modelius. Šios užduoties teorinėje dalyje išsamiai supažindinama su tiesinių lygčių ir tiesinių nelygybių bei jų sistemų sprendinių aibių grafiniu vaizdavimu. Aiškinama, kaip galima panaudoti grafikus sprendžiant kai kuriuos optimalaus planavimo uždavinius, pavyzdžiui, kai reikia sudaryti didžiausią pelną duosiantį gamybos planą ar kai pervežimus reikia organizuoti taip, kad išlaidos būtų mažiausios. Moksleiviai daugiausiai klydo nustatydami optimizavimo uždavinio sveikaskaitį sprendinį (kurio komponentės yra sveikieji skaičiai). Išspręskime dešimtąjį uždavinį.

Uždavinys. *Dviejų tipų gyvenamieji namai statomi iš dviejų rūšių detalių. Pirmo tipo name yra* 12 *butų, o antrojo —* 16 *butų. Pirmo tipo namui pastatyti reikia* 100 *pirmos rūšies ir* 110 *antros rūšies detalių, o antrojo —* 200 *pirmos rūšies ir* 90 *antros rūšies detalių. Kiek vieno ir kito tipo namų galima pastatyti turint* 1400 *pirmos rūšies ir* 990 *antros rūšies detalių, kad bendras butų skaičius būtų didžiausias?*

Sprendimas. Matematinį modelį lengviau parašyti sudarius duomenų lentelę:

Namų tipai	Detalės		Butų name skaičius
	D_1	D_2	
T_1	100	110	12
T_2	200	90	16
Ištekliai	1400	990	

Planuojamą pirmo tipo namų skaičių pažymėję x, o antrojo — y, gauname tokią apribojimų sistemą:

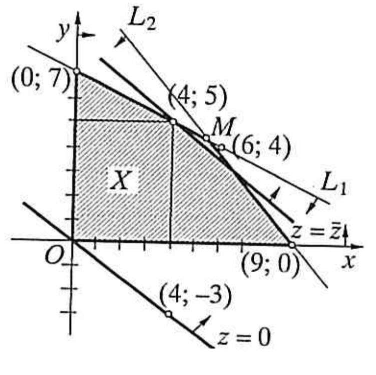
$$\begin{cases} 100x + 200y \leqslant 1400, \\ 110x + 90y \leqslant 990, \\ x \geqslant 0, y \geqslant 0. \end{cases}$$

Butų skaičius z randamas pagal formulę $z = 12x + 16y$. Taigi namų statybos optimalaus planavimo uždavinio matematinis modelis yra toks: rasti $\max(12x + 16y)$, kai

$$\begin{cases} x + 2y \leqslant 14, \\ 11x + 9y \leqslant 99, \\ x \geqslant 0, y \geqslant 0. \end{cases}$$

Šį uždavinį sprendžiame grafiškai (žr. pav.). Lygio tiesių kryptys tokios kaip tiesės $z = 0$, kurios lygtis yra $12x + 16y = 0$.

Didžiausią reikšmę tikslo funkcija įgyja taške M. Jo koordinates $(\frac{72}{13}; \frac{55}{13})$ randame iš lygčių $x+2y = 14$ ir $11x+9y = 99$ sistemos, nes šiame taške susikerta tiesės L_1 ir L_2. Taško M koordinatės nėra sveikieji skaičiai, todėl pora $(\frac{72}{13}; \frac{55}{13})$ nėra šio uždavinio sprendinys. Atkreipkime dėmesį į tai, kad ieškant sveikaskaičio optimaliojo plano apvalinti rastojo taško M koordinates nėra tikroji išeitis. Šiame uždavinyje apvalindami taško M koordinates gautume tašką $(6; 4)$, nepriklausantį leistinajai aibei, nes jis netenkina antrosios nelygybės (čia dažniausiai ir klydo moksleiviai!). Tikrąjį rezultatą $(4; 5)$ randame braižydami lygio tieses. Taigi reikia statyti 4 pirmo tipo ir 5 antro tipo namus.



Šeštoji ir septintoji užduotys skirtos kombinatorikos ir tikimybių teorijos žinioms pagilinti. Jas parengė profesorius Pranas Survila. Sunkiausiai sekėsi spręsti pirmąjį šeštosios temos ir devintąjį septintosios temos uždavinius.

Uždavinys (VI *tema*). *Septynis vienodai atrodančius bananus ir 5 skirtingo dydžio apelsinus reikia sudėti į du maišelius taip, kad kiekviename maišelyje būtų po lygiai vaisių ir ne mažiau kaip po 2 apelsinus. Kiek yra skirtingų pakavimo būdų, kai:* a) *maišeliai vienodi;* b) *maišeliai skiriasi?*

Sprendimas. a) Kai maišeliai vienodi, užtenka atrinkti vaisius į vieną maišelį, o likusius sudėti į kitą. Kadangi apelsinai skirtingi ir jų kiekviename maišelyje turi būti ne mažiau kaip 2, tai pirmame maišelyje gali būti: du apelsinai ir 4 bananai arba trys apelsinai ir trys bananai. Kai maišeliai laikomi vienodais, pakanka apskaičiuoti, keliais būdais galima sukomplektuoti pirmąjį maišelį, t. y. $C_5^2 \cdot 1 = 10$.

b) Kai maišeliai skirtingi, tai būdų yra $10 + 10 = 20$, nes maišelių turinius sukeitus gaunama kitokia pakuotė.

Uždavinys (VII *tema*). *Atsitiktinio dydžio X tikimybių skirstinys yra*

x_k	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
p_k	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5

Atsitiktinio dydžio Y tikimybių skirstinys toks:

y_k	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
q_k	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5

Įrodykite, kad $\mathbf{E}(X + Y) = \mathbf{E}X + \mathbf{E}Y$.

Pirmasis uždavinys, mūsų manymu, visai nesudėtingas. Moksleivius galbūt suklaidino sąlygos formuluotė apie vienodus ir skirtingus maišelius, todėl ne visi gavo teisingus atsakymus.

Antrasis yra įrodymo uždavinys — gal todėl ir suglumino dalį moksleivių. Nors uždavinio formuluotė gana „grėsminga“, jis lengvai įveikiamas — pakanka mokėti sudaryti atsitiktinių dydžių X ir Y sumos $X+Y$ skirstinį ir skaičiuoti matematinę viltį pagal žinomus skirstinius.

Kompleksiniai skaičiai mokyklinės matematikos programoje nenumatyti, todėl aštuntoji tema „Kompleksiniai skaičiai" LJMM klausytojams buvo visiškai nauja. Docentas Algirdas Nagelė ją išdėstė gana paprastai ir suprantamai, pateikė daug skaičiavimo ir taikymo pavyzdžių. Manome, kad moksleiviams ši tema patiko, nes gavome net apie 500 aštuntosios užduoties sprendimų. Prastesni buvo devintojo uždavinio sprendimo rezultatai. Reikėjo rasti šaknies $\sqrt[4]{-16}$ reikšmių aibę ir pavaizduoti ją geometriškai. Daugiausia klaidų čia pasitaikė užrašant skaičių -16 trigonometrine forma: $-16 = 16(\cos(\pi + 2k\pi) + i\sin(\pi + 2k\pi))$, $k \in Z$.

Suklydus nebepadėjo nė šaknies formulė

$$w_k = \sqrt[n]{z} \doteq \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi_0+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi_0+2k\pi}{n}\right);$$

čia φ_0 — pagrindinė kompleksinio skaičiaus z argumento reikšmė, $r = |z|$, $k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$.

Apžvelgėme visas ketvirtosios LJMM programos (2001—2003 metų) temas. Norime priminti, kad tęsdami tradiciją parengėme ir jau išleidome ketvirtąją jaunojo matematiko knygelę (*Jaunajam matematikui* 4, Danieliaus leidykla, 2003). Joje skaitytojas ras visą LJMM 2001–2003 mokslo metų teorinę medžiagą, užduotis ir jų sprendimus.