$\alpha + \omega$, 2003, Nr. 2, 49–52

Antrosios eilės homogeninių lygčių sistemų sudarymo pavyzdžiai

Vaidotas Dalinkevičius

Autorius siūlo homogeninių lygčių sistemos, turinčios iš anksto parinktus sprendinius, sudarymo būdą. Jis pravers mokytojams rengiant lygčių sistemų sprendimo užduotis. Straipsnio autorius — Santariškių konsultacinio mokymo centro matematikos vyr. mokytojas.

Sudarydami lygčių sistemą, norime kad jos sprendiniai būtų „gražūs“ (sveikieji) skaičiai. Kitaip mokiniams per sunku rasti sprendinius ir jiems ši užduotis pasidaro nuobodi. Tai paskatino ieškoti būdų, kaip sudaryti lygčių sistemą su sveikaisiais koeficientais, kad ir sprendiniai būtų sveikieji skaičiai.

Turime antrosios eilės dviejų homogeninių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1, \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2. \end{cases}$$

Jos sprendiniai yra $(x_1; y_1)$, $(-x_1; -y_1)$, $(x_2; y_2)$, $(-x_2; -y_2)$. Norime, kad sprendiniai būtų sveikieji skaičiai, be to, ir $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2$ taip pat būtų sveikieji skaičiai.

Sprendinius $(x_1; y_1)$ ir $(x_2; y_2)$ pasirenkame laisvai. Juos įstatę į lygtį

$$ax^2 + bxy + cy^2 = d,$$

gauname:

$$ax_1^2 + bx_1y_1 + cy_1^2 = d, \tag{1}$$
$$ax_2^2 + bx_2y_2 + cy_2^2 = d. \tag{2}$$

Mūsų užduotis – rasti a, b, c ir d. Iš (1) atėmę (2), gauname

$$a(x_1^2 - x_2^2) + b(x_1y_1 - x_2y_2) + c(y_1^2 - y_2^2) = 0. \tag{3}$$

Vieną iš trijų koeficientų a, b, c pasirinkę laisvai, tarkime c, gauname

$$ma + nb = k. \tag{4}$$

Tai diofantinė lygtis, čia m, n ir k žinomi sveikieji skaičiai: $m = x_1^2 - x_2^2$, $n = x_1y_1 - x_2y_2$ ir $k = c(y_2^2 - y_1^2)$. Reikia rasti $a, b \in \mathbf{Z}$. Randame a ir b (jų yra be galo daug), prijungiame c, tada paėmę bet kurį iš sprendinių $(x_1; y_1)$ ar $(x_2; y_2)$ randame d. Sudarome lygtį

$$ax^2 + bxy + cy^2 = d.$$

Kadangi turime laisvę rinkdamiesi c (arba kitą koeficientą), be to, laisvai pasirenkame skaičių porą a ir b iš visų galimų sprendinių, todėl galime sudaryti dvi lygtis (ir daugiau):

$$a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 \quad \text{ir} \quad a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2,$$

kurioms tinka sprendiniai $(x_1; y_1)$ ir $(x_2; y_2)$, kartu ir sprendiniai $(-x_1; -y_1)$, $(-x_2; -y_2)$.

Tokiu būdu sudarome lygčių sistemą su sveikaisiais koeficientais, kurių sprendiniai iš anksto pasirinkti sveikieji skaičiai.

1 pavyzdys. Pasirenkame sprendinius: $x_1 = 1$, $y_1 = 2$; $x_2 = -1$, $y_2 = 1$ ir įstatome juos į (3) lygtį:

$$a(1-1) + b(2+1) + c(4-1) = 0,$$
$$3b + 3c = 0.$$

Lygybė (4) virsta tokia: $b = -c$.

Šiuo atveju a pasirenkame laisvai: $a = 2$. Pasirenkame porą b ir c: tegu $b = 3$, tada $c = -3$. Randame d (įstatę sprendinius (x_1, y_1) arba (x_2, y_2)):

$$d_1 = ax^2 + bxy + cy^2 = 2x^2 + 3xy - 3y^2 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 3 \cdot 4 = -4.$$

Dar kartą laisvai pasirenkame b ir c: tegu $b = 1$, tada $c = -1$ (galėtume pakeisti ir a), gauname

$$d_2 = ax^2 + bxy + cy^2 = 2x^2 + xy - y^2 = 2 \cdot 1 + 2 - 4 = 0.$$

Dabar sudarome lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2x^2 + 3xy - 3y^2 = -4, \\ 2x^2 + xy - y^2 = 0. \end{cases}$$

Ji turi sprendinius $(1; 2)$, $(-1; -2)$, $(-1; 1)$, $(1; -1)$.

Jei būtume pakeitę ir a, t. y. pasirinkę $a = 1$, tai gautume:

$$d_2 = ax^2 + bxy + cy^2 = x^2 + xy - y^2 = 1 + 2 - 4 = -1,$$
$$\begin{cases} 2x^2 + 3xy - 3y^2 = -4, \\ x^2 + xy - y^2 = -1. \end{cases}$$

Jai tinka tie patys sprendiniai. Pirmame pavyzdyje (4) lygtis buvo tokia:

$$0 \cdot a + 3b + 3c = 0.$$

Kadangi koeficientas prie a yra nulis, lygtis supaprastėjo ir labai lengvai radome sveikuosius sprendinius.

2 pavyzdys. Pasirenkame sprendinius: $x_1 = 1$, $y_1 = 2$; $x_2 = -2$, $y_2 = 3$ ir statome juos į (3) lygtį:

$$a(1-4) + b(2+6) + c(4-9) = 0,$$
$$-3a + 8b - 5c = 0.$$

Pasirenkame $c = -2$. Tada

$$-3a + 8b = -10.$$

Gauta lygtis yra diofantinė. Ją spręsime naudodami grandinines trupmenas*.

* Žr., pavyzdžiui, R. Skrabutėnas, Grandininės trupmenos, *Alfa plius omega*, **2**, 71–76, 2000.

Pateiksime tik šios konkrečios lygties sprendimo pavyzdį.

Sudarome trupmeną iš koeficienų prie nežinomųjų, gauname $-\frac{3}{8}$. Vardiklis yra natūralusis skaičius, o skaitiklis — sveikasis skaičius. Šią trupmeną užrašome baigtine grandinine trupmena (BGT). Taikome Euklido algoritmą. Atskiriame sveikąją ir trupmeninę dalis ir randame grandininės trupmenos elementus q_i, q_0 — skaičiaus sveikoji dalis.

$$\begin{array}{lllll} -\dfrac{3}{8} = -1 + \dfrac{5}{8}, & \dfrac{8}{5} = 1 + \dfrac{3}{5}, & \dfrac{5}{3} = 1 + \dfrac{2}{3}, & \dfrac{3}{2} = 1 + \dfrac{1}{2}, & \dfrac{2}{1} = 2 + 0; \\ q_0 = -1, & q_1 = 1, & q_2 = 1, & q_3 = 1, & q_4 = 2. \end{array}$$

Dalybą baigiame, kai gauname liekaną, lygią nuliui. Gavome grandininę trupmeną:

$$-\frac{3}{8} = -1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}, \quad \text{t. y.} \quad q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{q_4}}}}.$$

Simboliškai užrašome grandininę trupmeną pavidalu $[q_0, q_1, q_2, q_3, q_4] = [-1, 1, 1, 1, 2]$. Dydžius P_k ir Q_k (k kinta nuo -1 iki 4) apskaičiuosime pagal rekurentines formules:

$$P_{-1} = 1, \qquad P_0 = q_0 \quad \text{ir} \quad Q_{-1} = 0, \qquad Q_0 = 1;$$

kai $k \geqslant 1$, tai

$$P_k = q_k P_{k-1} + P_{k-2}, \qquad Q_k = q_k Q_{k-1} + Q_{k-2}.$$

Trupmeną $R_k = \frac{P_k}{Q_k}$ vadiname k-osios eilės reduktu. BTG paskutinės (n-os, $n = 4$) eilės reduktas $R_n = \frac{P_n}{Q_n} = -\frac{3}{8}$ sutampa su išskleistuoju racionaliuoju skaičiumi.

Skaičiuojant patogu dydžius rašyti į lentelę:

k	-1	0	1	2	3	4
q_k		-1	1	1	1	2
P_k	1	-1	0	-1	-1	-3
Q_k	0	1	1	2	3	8

Grįžkime prie diofantinės lygties

$$ma + nb = k.$$

Jos sprendinius galime apskaičiuoti pagal formules:

$$a = (-1)^{n-1} k Q_{n-1} + nt, \qquad b = (-1)^{n-1} k P_{n-1} - mt;$$

čia n — paskutinio redukto eilė, Q_{n-1}, P_{n-1} — priešpaskutinio redukto vardiklis ir skaitiklis, $t \in \mathbf{Z}$.

Mūsų atveju gauname

$$-3a + 8b = -10, \qquad a = 10 \cdot 3 + 8t = 30 + 8t, \qquad b = 10 + 3t.$$

Jei $t_1 = -3$, tai $a_1 = 6$, $b_1 = 1$, $c_1 = -2$ (buvome pasirinkę);

jei $t_2 = -4$, tai $a_2 = -2$, $b_2 = -2$, $c_2 = -2$ (jei pakeistume c_2, tai žinoma keistųsi ir a_2 bei b_2).

Pasitaikė taip, kad visi koeficientai prastinasi. Suprastinę gauname $a_2 = 1$, $b_2 = 1$, $c_2 = 1$.

Apskaičiuojame d įstatę pasirinktą (nesvarbu kurią, d reikšmė bus ta pati) sprendinių porą $(x_1; y_1)$ arba $(x_2; y_2)$:

$$d_1 = a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = 6x^2 + xy - 2y^2 = 6 \cdot 1 + 1 \cdot 2 - 2 \cdot 4 = 0 \ (6 \cdot 4 - 6 - 2 \cdot 9 = 0);$$
$$d_2 = a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = x^2 + xy + y^2 = 1 + 2 + 4 = 7 \ (4 - 6 + 9 = 7).$$

Gavome lygčių sistemą

$$\begin{cases} 6x^2 + xy - 2y^2 = 0, \\ x^2 + xy + y^2 = 7. \end{cases}$$

Keisdami t reikšmes, galime, kiek tik norime, sudaryti lygčių su sveikaisiais koeficientais a, b, c, kurie turės pasirinktuosius sveikuosius sprendinius $(x_1; y_1)$, $(-x_1; -y_1)$, $(x_2; y_2)$, $(-x_2; -y_2)$.