$\alpha + \omega$, 2003, Nr. 2, 41–47

Apibrėžtinio integralo taikymai ekonomikos uždaviniams

Kazimieras Pulmonas

Straipsnyje pateikiama apibrėžtinio integralo taikymo, skaičiuojant ekonominius rinkos rodiklius (vartotojo ir gamintojo perviršius ir kt.), pavyzdžių.

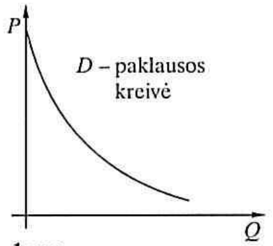
Kol kas matematikos kurse integralinis skaičiavimas taikomas vien tik figūrų plotams ir sukimosi kūnų tūriams skaičiuoti, labai retais atvejais — fizikos ir technikos problemoms spręsti. Ekonomikos klausimų nagrinėjimas šiuolaikiškoje mokykloje, ypač ekonominės pakraipos klasėse, leidžia integralinio skaičiavimo taikymus išplėsti ir procesų, vykstančių ekonomikoje, modeliavimui bei tyrimui.

Panagrinėkime keletą pavyzdžių, iliustruojančių apibrėžtinio integralo taikymo galimybes sprendžiant kai kuriuos ekonomikos uždavinius, susijusius su rinkos ekonomikoje naudojamomis *vartotojo* (*pirkėjo*) *perviršio CS* (*consumer's surplus*) ir *gamintojo* (*pardavėjo*) *perviršio PS* (*producer surplus*) sąvokomis. Pradėkime nuo keleto paprasčiausių ekonomikos sąvokų ir simbolių, beje glaudžiai susijusių su funkcijos sąvoka.

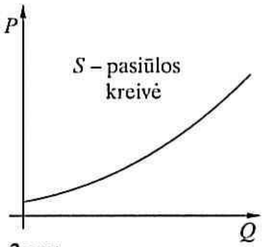
Prekės (paslaugų) *paklausa D* (*demand*) yra per tam tikrą laiką susiklosčiusi priklausomybė tarp prekės (paslaugos) kainos *P* (*price*) ir perkamos prekės (paslaugos) kiekio *Q* (*quantity*). Tai vartotojo noras ir finansinis pajėgumas pirkti prekę (paslaugą) konkrečia kaina. *Paklausa* grafiškai vaizduojama kreive, kurios krypties koefcientas yra neigiamas. Praktiškai tai reiškia, kad kuo prekė (paslauga) brangesnė, tuo mažesnis jos kiekis yra nuperkamas, ir atvirkščiai. Paprastai, ekonomistai prekės (paslaugos) kainą *P*, kaip funkcijos argumentą, koordinačių plokštumoje vaizduoja vertikalioje ašyje, o parduotas prekes (paslaugas) ir jų kiekį *Q*, kaip priklausomą kintamąjį — horizontalioje ašyje (1 pav.).

Prekės (paslaugos) *pasiūla S* (*supply*) — per tam tikrą laiką susiklosčiusi priklausomybė tarp prekės (paslaugos) kainos *P* ir parduodamos prekės (paslaugos) kiekio *Q*. Tai prekės (paslaugos) kiekis, kurį pardavėjai ar gamintojai norėtų ir galėtų parduoti konkrečia kaina. *Pasiūla* grafiškai vaizduojama kreive, kurios krypties koeficientas yra teigiamas. Praktiškai tai reiškia, kad kuo prekė (paslauga) brangesnė, tuo labiau pardavėjai ar gamintojai nori didinti jų gamybą, kartu ir jų pardavimą. Koordinačių ašys čia turi tą pačią prasmę kaip ir paklausos vaizdavimo atveju (2 pav.).

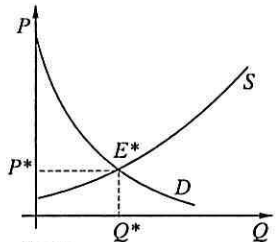
Rinkos pusiausvyra (*equilibrium*) — tai tokia būklė, kai nėra polinkio keistis. Tai rinkos situacija, kurioje nei vartotojai-pirkėjai, nei gamintojai-pardavėjai neturi akstino keisti savo elgsenos. Kitaip tariant, *paklausos ir pasiūlos pusiausvyra* — tai prekės kiekio ir kainos santykis, kuris tenkina pirkėjo ir pardavėjo (vartotojo ir gamintojo) interesus, kai jų norai ir galimybės sutampa. Šiuo atveju *pusiausvyros kaina* (*equilibrium price*) — tai rinkos kaina, kuriai esant prekės (paslaugos) paklausa lygi jos pasiūlai, o *pusiausvyros kiekis* (*equilibrium quantity*) — tai gaminių (paslaugų) kiekis, parduodamas už pusiausvyros, t. y. rinkos, kainą. Šias reikšmes atitinka paklausos ir pasiūlos kreivių susikirtimo taško E^* koordinatės P^* ir Q^*. Pusiausvyros taškas E^* $(P^*; Q^*)$ (3 pav.). Sandauga P^*Q^* yra vartotojų, t. y. pirkėjų, *bendrosios išlaidos* įsigyjant prekių pusiausvyros kiekį Q^* už nusistovėjusią rinkos kainą P^*. Šias bendrąsias išlaidas iliustruoja stačiakampio A plotas (4 pav.).



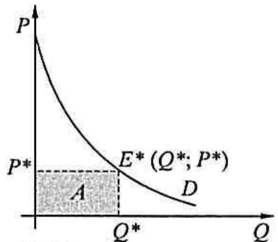
1 pav.



2 pav.



3 pav.



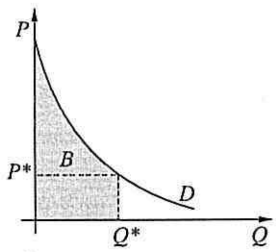
4 pav.

Figūros B plotas iliustruoja bendrą pinigų sumą, kurią vartotojai (pirkėjai) yra pasirengę sumokėti už įsigyjamą Q^* prekių kiekį (5 pav.). O jis kaip tik randamas apskaičiavus apibrėžtinį integralą

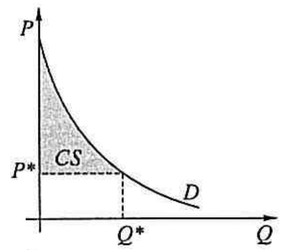
$$S_B = \int_0^{Q^*} P(Q)\,\mathrm{d}Q;$$

čia $P(Q)$ yra paklausos $Q(P)$ atvirkštinė funkcija.

Figūros B ir stačiakampio A plotų skirtumas iliustruoja *vartotojų perviršį* (6 pav.). Vartotojo perviršis (CS) įsigyjant tam tikros prekės Q^* vienetų yra vadinama pinigų sumos, kurią vartotojai yra pasiruošę sumokėti už šį įsigyjamą prekių kiekį ir realių išlaidų, kurios skiriamos šioms prekėms, skirtumas. Grafiškai vartotojo perviršis atitinka figūros, apribotos paklausos kreive, ordinačių ašimi ir tiese, kuri yra lygiagreti su abscisių ašimi ir yra nubrėžta per rinkos pusiausvyros tašką E^*.



5 pav.



6 pav.

Vartotojo perviršis apskaičiuojamas pagal formulę

$$CS = \int_0^{Q^*} P(Q)\,\mathrm{d}Q - P^*Q^*.$$

1 pavyzdys. Dienos ledų paklausą paplūdimyje nusako funkcija $Q = \frac{1000}{P} - 1$, o pasiūlą — $Q = 500P - 501$; čia Q — ledų porcijų skaičius, o P — porcijos kaina litais.

a) Kiek porcijų ir už kokią rinkos kainą yra perkami ledai paplūdimyje?

b) Kiek pinigų kasdien yra išleidžiama ledams paplūdimyje?
c) Kokią pinigų sumą paplūdimio poilsiautojai yra pasirengę sumokėti už ledus?
d) Kiek litų sudaro poilsiautojų paplūdimyje perviršis ledams?

Sprendimas:

a) Spręsdami lygčių sistemą

$$\begin{cases} Q = \frac{1000}{P} - 1, \\ Q = 500P - 501, \end{cases}$$

randame: $\frac{1000}{P} - 1 = 500P - 501$, $P^2 - P - 2 = 0$, $P_1 = -1$ (netinka pagal uždavinio prasmę) $P_2 = P^* = 2$, o $Q^* = 499$.
Vadinasi, ledų porcijos paplūdimyje rinkos kaina yra 2 Lt, o parduodama per dieną 499 porcijų ledų.

b) Poilsiautojai paplūdimyje kasdien išleidžia ledams $2 \cdot 499 = 998$ (Lt).

c) Iš paklausos funkcijos $Q = \frac{1000}{P} - 1$ išsireiškiame jai atvirkštinę funkciją $P = \frac{1000}{Q+1}$. Paplūdimio poilsiautojai kasdien už ledus yra pasirengę išleisti

$$\int_0^{499} \frac{1000}{Q+1}\,\mathrm{d}Q = 1000 \ln|Q+1|\Big|_0^{499} = 1000(\ln 500 - \ln 1) = 1000 \ln 500 \approx 6215 \text{ (Lt)}.$$

d) Paplūdimio poilsiautojų perviršis ledams per dieną sudaro

$$CS = \int_0^{499} \frac{1000}{Q+1}\,\mathrm{d}Q - 2 \cdot 499 = 1000 \ln 500 - 998 \approx 5217 \text{ (Lt)}.$$

Atsakymas. a) 499 porcijos, 2 Lt; b) 998 Lt; c) ≈ 6215 Lt; d) ≈ 5217 Lt.

2 pavyzdys. Tam tikros prekės paklausa per savaitę yra išreiškiama funkcija $Q = \sqrt{36 - P}$, o pasiūla — $Q = 2\sqrt{P - 16}$; čia Q yra prekių vienetų skaičius, P — prekės kaina litais.

a) Kokia yra prekės rinkos kaina?
b) Už kiek litų per savaitę parduodama šių prekių?
c) Kokią pinigų sumą pirkėjai yra pasiruošę sumokėti už šią prekę?
d) Kiek litų sudaro šios prekės vartotojų perviršis?

Sprendimas:

a) Prekės rinkos kainą gauname spręsdami lygčių sistemą

$$\begin{cases} Q = \sqrt{36 - P}, \\ Q = 2\sqrt{P - 16}. \end{cases}$$

Gauname: $36 - P = 4P - 64$, $5P = 100$, $P^* = 20$ Lt.

b) Per savaitę tokių prekių parduodama $\sqrt{36 - 20} = 4$, todėl įplaukos už parduotas prekes yra $20 \cdot 4 = 80$ (Lt).

c) Vartotojai už šią prekę per savaitę yra pasiruošę sumokėti

$$\int_0^4 (36 - Q^2)\,\mathrm{d}Q = \left(36Q - \frac{Q^3}{3}\right)\Big|_0^4 = 144 - \frac{64}{3} = 122\frac{2}{3} \text{ (Lt)}.$$

d) Šios prekės pirkėjų, t. y. vartotojų perviršis sudaro

$$\int_0^4 (36 - Q^2)\,\mathrm{d}Q - 20 \cdot 4 = 122\frac{2}{3} - 80 = 42\frac{2}{3}\ \text{(Lt)}.$$

Atsakymas. a) 20 Lt; b) 80 Lt; c) $122\frac{2}{3}$ Lt; d) $42\frac{2}{3}$ Lt.

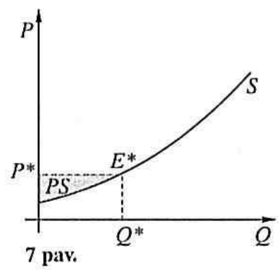
Panašiai vartotojo perviršiui yra apibrėžiamas ir *gamintojo (pardavėjo) perviršis (PS)*. Nesileisdami į detales konstatuojame, kad gamintojo perviršį sudaro pinigų sumos, už kurią gamintojas (pardavėjas) yra pasiruošęs parduoti Q^* prekės vienetų, ir tos sumos, kurią jis realiai gauna pardavęs šį prekės kiekį, skirtumas. Grafiškai gamintojo perviršį sudaro plotas figūros, apribotos pasiūlos kreive, kainos koordinačių ašimi P ir tiese, lygiagrečia su abscisių ašimi ir einančia per rinkos pusiausvyros tašką E^* (7 pav.). Akivaizdu, kad

$$PS = P^*Q^* - \int_0^{Q^*} (Q)\,\mathrm{d}Q.$$

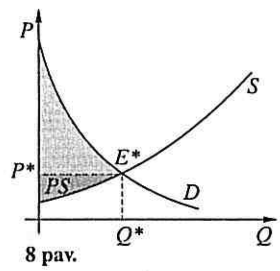
Pavyzdžiui, nagrinėtame 2 pavyzdyje, prekės gamintojo perviršis

$$PS = 20 \cdot 4 - \int_0^4 (16 + 0{,}25Q^2)\,\mathrm{d}Q = 80 - \left(16Q + 0{,}25 \cdot \frac{Q^3}{3}\right)\bigg|_0^4$$

$$= 80 - \left(64 + \frac{16}{3}\right) = 10\frac{2}{3}\ \text{(Lt)}.$$



7 pav.



8 pav.

3 pavyzdys. Žinoma, kad prekės pasiūla išreiškiama lygtimi $Q = \sqrt[3]{0{,}25P - 0{,}5}$; čia Q — prekės kiekis vienetais, P — kaina litais, o šios prekės rinkos pusiausvyra nusistovi, kai parduodami 3 vienetai per dieną. Apskaičiuokite:

a) už kokią sumą gamintojas yra pasiruošęs parduoti iki trijų prekių per dieną;

b) kiek pelningai gamintojas parduoda 3 prekes vartotojams?

Sprendimas:

a) Iš lygties $Q = \sqrt[3]{0{,}25P - 0{,}5}$ nežinomąjį P išreiškiame nežinomuoju Q:

$$Q^3 = 0{,}25P - 0{,}5, \qquad P = 4Q^3 + 2.$$

Suma, už kurią gamintojas yra pasiruošęs parduoti iki trijų prekių, yra

$$\int_0^3 (4Q^3 + 2)\,\mathrm{d}Q = (Q^4 + 2Q)\big|_0^3 = 81 + 6 = 87\ \text{(Lt)}.$$

b) Gamintojo parduodamos produkcijos pelningumą (naudą) nusako gamintojo perviršis. Parduodamos prekės rinkos kaina apskaičiuojama iš lygties

$$Q = \sqrt[3]{0{,}25P - 0{,}5}, \quad \text{t. y.:} \quad 3 = \sqrt[3]{0{,}25P - 0{,}5}, 27 = 0{,}5P - 0{,}5, \quad P = 110\,\text{Lt}.$$

Šią kainą galima apskaičiuoti ir kitaip — iš pradžių pertvarkyti pasiūlos lygtį $P = 4Q^3 + 2$ ir rasti $P(3) = 4 \cdot 27 + 2 = 110\,(\text{Lt})$.
Taigi produkcijos gamintojo perviršis

$$PS = 110 \cdot 3 - \int_0^3 (4Q^3 + 2)\,\mathrm{d}Q = 330 - 87 = 243\,(\text{Lt}).$$

Atsakymas. a) 87 Lt; b) 243 Lt.

Išnagrinėjome, kaip apibrėžiami ir skaičiuojami vartotojo ir gamintojo perviršiai. Galime padaryti išvadą, kad šių perviršių suma — 8 paveiksle išryškintos figūros plotas — charakterizuoja gamybos ir vartojimo konkurencinėje rinkoje bendrą efektą. Formaliai galime nagrinėti ir jį. Pavyzdžiui, nagrinėto 2 pavyzdžio gaminių gamybos ir realizavimo konkurencinėje rinkoje bendras finansinis efektas yra

$$CS + PS = \int_0^4 \left(36 - Q^2\right) \mathrm{d}Q - \int_0^4 \left(16 + 0{,}25Q^2\right) \mathrm{d}Q =$$

$$= \int_0^4 \left(20 - 1{,}25Q^2\right) \mathrm{d}Q = \left(20Q - 1{,}25 \cdot \frac{Q^3}{3}\right)\bigg|_0^4 = 20 \cdot 4 - \frac{5}{4} \cdot \frac{64}{3} = 53\frac{1}{3}\,(\text{Lt}).$$

Tačiau dažnai *CS* ir *PS* absoliučiosios reikšmės ekonomistus mažai domina. Jiems svarbiau, *kaip ir kiek* pakis vartotojų perviršis taikant tam tikras finansines priemones, kurias vykdo valstybė rinkos ekonomikos sąlygomis, pavyzdžiui, apmokestinus prekes, teikiant subsidijas ir pan. Išnagrinėkime, kokios įtakos vartotojų materialinei padėčiai turės tam tikrai prekei uždedamas papildomas t piniginių vienetų mokestis. Taikant šią priemonę, keisis pasiūlą išreiškianti funkcija: $P = P(Q) + t$. Grafiškai tai atitiks prekės pasiūlos funkcijos kreivės lygiagretų postūmį į viršų papildomo mokesčio dydžiu, nepasikeitus prekės paklausos funkcijai. Suprantama, kad tokiu atveju pasikeis rinkos pusiausvyra, kartu pakis ir vartotojo perviršis.

4 pavyzdys. Miestelėnų kasdienę vienos rūšies vaisvandenių paklausą ir pasiūlą rodo atitinkamai lygtys $P = \frac{200}{Q+1}$ ir $P = 1{,}01 + 0{,}01Q$ (Q — butelių skaičius, P — kaina litais). Apskaičiuokite, kiek litų prarastų miestelėnai, jeigu butelis šių vaisvandenių papildomai būtų apmokestintas 0,7 Lt?

Sprendimas. Kad atsakytume į klausimą, reikia būtinai žinoti vartotojo perviršių apimtis iki vaisvandenių butelio apmokestinimo ir po jo. Taigi reikia apskaičiuoti rinkos pusiausvyros kainas ir parduotų butelių kiekio reikmes iki ir po šios rūšies vaisvandenių apmokestinimo. Iki papildomo apmokestinimo P^* ir Q^* pusiausvyros reikšmes randame išsprendę lygčių sistemą

$$\begin{cases} P = \frac{200}{Q+1}, \\ P = 1{,}01 + 0{,}01Q \end{cases} \quad \text{arba} \quad \begin{cases} P = \frac{200}{P} - 1, \\ P = 100P - 101. \end{cases}$$

Iš čia $P_1^* = 2$, o $Q_1^* = 99$.

Vartotojo perviršis

$$CS_1 = \int\limits_0^{99} \frac{200}{Q+1}\,\mathrm{d}Q - 2\cdot 99 = 200\ln|Q+1|\Big|_0^{99} - 198 = 200\ln 100 - 198\ (\mathrm{Lt}).$$

Butelį vaisvandenių apmokestinus 0,7 Lt, pasiūlos funkcija pasikeis ir bus lygi $P = (1{,}01 + 0{,}01Q) + 0{,}7$; $P = 1{,}71 + 0{,}01Q$. Naują pusiausvyros tašką randame išsprendę lygčių sistemą

$$\begin{cases} P = \frac{200}{Q+1}, \\ P = 1{,}71 + 0{,}01Q, \end{cases} \quad \text{arba} \quad \begin{cases} Q = \frac{200}{P} - 1, \\ Q = 100P - 171. \end{cases}$$

Iš čia $P_2^* = 2{,}5$, o $Q_2^* = 79$. Apskaičiuojame vartotojo perviršį CS_2, apmokestinus vaisvandenių butelį:

$$CS_2 = \int\limits_0^{79} \frac{200}{Q+1}\,\mathrm{d}Q - 2{,}5\cdot 79 = 200\ln|Q+1|\Big|_0^{79} - 197{,}5 = 200\ln 80 - 197{,}5\ (\mathrm{Lt}).$$

Miestelėnų gerovės (naudos) praradimas, apmokestinus papildomai vartojamą prekę sudaro

$$\begin{aligned} \triangle CS = CS_1 - CS_2 &= 200\ln 100 - 198 - (200\ln 80 - 197{,}5) = \\ &= 200\ln 100 - 200\ln 80 - 0{,}5 = 200(\ln 100 - \ln 80) - 0{,}5 = \\ &= 200\ln 1{,}25 - 0{,}5 \approx 44{,}13\ (\mathrm{Lt}). \end{aligned}$$

Matome, kad butelį vaisvandenių apmokestinus 0,7 Lt, miestelio vartotojai praranda apytikriai 44 Lt. Ir tai tik papildomai apmokestinus vieną prekių rūšį. Nesunku įsivaizduoti, kokia našta yra vartotojui, įvedus įvairius papildomus mokesčius ir kitoms vartojimo prekėms.

Atsakymas. $(200\ln 1{,}25 - 0{,}5)$ Lt $\approx 44{,}13$ Lt.

Suprantama, visi aptarti pavyzdžiai atitinka tik tam tikrus, praktiškai idealius modelius.

Šiuos uždavinius siūlome išspręsti savarankiškai:

1. Prekės paklausa ir pasiūla per dieną aprašomos atitinkamai lygtimis $Q = -0{,}6P + 8$ ir $Q = 0{,}4P - 2$.

a) Raskite prekės rinkos kainą ir parduodamų prekių kiekį.

b) Kokia yra vartojimo išlaidų (vartotojų bendrųjų išlaidų) suma?

c) Kokią pinigų sumą yra pasiruošę išleisti per dieną šios prekės vartotojai?

d) Kokia yra vartotojo perviršio suma?

Pastaba. Šiame ir visuose kituose uždaviniuose Q yra prekių (paslaugų) skaičius vienetais, o P — prekės (paslaugos) kaina litais.

Atsakymas. a) 10 Lt, 2 vnt; b) 20 Lt; c) $23\frac{1}{3}$ Lt; d) $3\frac{1}{3}$ Lt.

2. Tam tikros prekės paklausą nusako funkcija $P = 5 - Q^2$, o nusistovėjusi rinkos kaina lygi 1 Lt. Apskaičiuokite vartotojo perviršio sumą.

Atsakymas. $5\frac{1}{3}$ Lt.

3. Prekės paklausą nusako funkcija $Q = \frac{1000}{P^3}$, o šios prekės pasiūlą — $Q = 62{,}5P$.

a) Raskite vartotojų bendrąsias išlaidas įsigyjant šią prekę.

b) Kiek litų yra pasiruošę išleisti vartotojai įsigydami šią prekę?

c) Apskaičiuokite vartotojo perviršį.

Atsakymas. a) 250 Lt; b) 375 Lt; c) 125 Lt.

4. Paslaugos paklausa išreiškiama lygtimi $P = \frac{300}{Q+2}$, o pasiūla — funkcija $P = Q + 15$. Apskaičiuokite vartotojo perviršį naudojantis šia paslauga.

Atsakymas. $(300 \ln 6 - 250)$ Lt$\approx$ 287,53 Lt.

5. Paslaugos pasiūla išreiškiama lygtimi $Q = 2\sqrt{P - 16}$, o šios paslaugos rinkos kaina lygi 20 Lt. Apskaičiuokite:

a) pinigų suma, už kurią paslaugos teikėjas yra pasiruošęs parduoti šią paslaugą iki gaudamas už ją 20 Lt;

b) šios paslaugos pardavėjo perviršį.

Atsakymas. a) $69\frac{1}{3}$ Lt; b) $10\frac{2}{3}$ Lt.

6. Prekės paklausą nusako funkcija $Q = \frac{30}{P} - 1$, o pasiūlą — funkcija $Q = P - 2$. Apskaičiuokite prekės: a) vartotojo perviršį; b) gamintojo perviršį.

Atsakymas. a) $(30 \ln 5 - 24)$ Lt $\approx$ 24,28 Lt; b) 8 Lt.

7. Paslaugos paklausa ir pasiūla yra išreiškiamos atitinkamai lygtimis $Q = \frac{480}{P} - 1$ ir $Q = 10P - 21$. Apskaičiuokite paslaugos: a) vartotojo perviršį; b) tiekėjo perviršį.

Atsakymas. a) $(480 \ln 60 - 472)$ Lt $\approx$ 1493,29 Lt; b) 174,05 Lt.

8. Prekės paklausą nusako funkcija $Q = \frac{600}{P} - 1$, jos pasiūlą — funkcija $P = 1{,}01 + 0{,}01Q$. Apskaičiuokite prekės vartotojo ir gamintojo perviršių sumą.

Atsakymas. $(600 \ln 200 - 399)$ Lt $\approx$ 2780 Lt.

9. Prekės paklausa išreiškiama lygtimi $Q = 20 - 2P$. Prekės rinkos kaina yra 2 Lt. Kiek prarastų vartotojai, jeigu ši prekė būtų apmokestinta papildomu 1 Lt mokesčiu?

Atsakymas. 15 Lt.

10. Tam tikros prekės paklausos funkcija yra $P = 36 - Q^2$, o šios prekės pasiūlos funkcija — $P = 6 + 0{,}25Q^2$. Apskaičiuokite vartotojų prarandamą pinigų sumą, apmokestinus prekę 10 Lt.

Atsakymas. $(32\sqrt{6} - 42\frac{2}{3})$ Lt $\approx$ 35,72 Lt.

$\alpha + \omega$, 2003, Nr. 2, 48

Aiškinkime paprastai

Petras Vaškas

Rašinėlyje aptariamas dviejų kvadratinių funkcijų grafikų bendros liestinės jų bendrame taške radimo uždavinys. Pridedamas tas truputis, kurio trūksta mokytojo A. Petronio sprendime (žr. R. Kudžmos straipsnį „Alfa plius omega“ 2003, Nr.1).

Funkcijų

$$y = a_1x^2 + b_1x + c_1, \tag{1}$$
$$y = a_2x^2 + b_2x + c_2 \tag{2}$$

grafikų bendrų taškų abscisės turi tenkinti lygtį

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = a_2x^2 + b_2x + c_2,$$

arba

$$(a_1 - a_2)x^2 + (b_1 - b_2)x + (c_1 - c_2) = 0. \tag{3}$$

Antra vertus, bendrų taškų koordinatės turi tenkinti ir lygtį, gautą iš (1) ir (2) lygčių pašalinus x^2, t. y. lygtį

$$(a_1 - a_2)y = (a_1b_2 - a_2b_1)x + (a_1c_2 - a_2c_1). \tag{4}$$

Kai bent vienas iš (4) lygties x ir y koeficientų nelygus nuliui, ta lygtis yra tiesės lygtis.

Prisiminkime: kai tiesė eina per du kreivės taškus, ji yra kreivės kirstinė; kai vienas taškas kreive neribotai artėja prie kito, iš kirstinės gauname liestinę. Taigi kai (3) lygtis turi vieną sprendinį (du sutampančius sprendinius), (4) lygtis yra per (1) ir (2) funkcijų grafikų bendrą tašką einančios liestinės lygtis (aišku, kad tada $a_1 - a_2 \neq 0$).

Aišku, kad (3) lygties ir nereikia spręsti. Nereikia atsiminti ir (3) bei (4) lygčių — svarbu suprasti esmę.

Pagaliau nereikia nei Teiloro formulės, nei išvestinių.