$\alpha + \omega$, 2003, Nr. 2, 36–40

# Fransua Vijetas ir jo teorema

Svajūnas Sajavičius
svajunas.sajavicius@mail.lt

*Šiame straipsnyje trumpai apžvelgiamas garsaus šešioliktojo amžiaus prancūzų matematiko ir teisininko Fransua Vijeto gyvenimas, nagrinėjama jo teorema, siejanti algebrinės lygties koeficientus su jos sprendiniais, pateikiami keli šios teoremos taikymo pavyzdžiai ir uždaviniai savarankiškam sprendimui.*

*Straipsnio autorius studijuoja matematiką Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultete.*

## F. Vijeto gyvenimo kelias ir svarbiausieji darbai

Fransua Vijetas (*François Viète*) gimė 1540 metais Prancūzijos Fontenay-le-Comte miestelyje, dabartinėje Vendée provincijoje teisininko Etjeno Vijeto (*Etienne Viète*) šeimoje. Baigęs pradinę mokyklą gimtajame miestelyje, turbūt sekdamas tėvo pėdomis, Fransua pasirinko teisininko kelią: įstojo į Poitiers universitetą, esantį už 80 km nuo Fontenay-le-Comte miestelio, ir 1560 metais tapo diplomuotu teisininku. Tačiau pagal specialybę dirbo vos ketverius metus. 1564 metais F. Vijetas pradėjo privačiai mokyti Antuanetės d'Aubeteri (*Antoinette d'Aubeterre*) dukrą Kateriną, o po poros metų mirus Katerinos tėvui kartu su ja išvyko į La Rochelle miestą.

Fransua Vijetas (1540–1603)

Nuo 1560 metų Prancūziją valdė Karolis (*Charles*) IX, o jau nuo 1562-ųjų ten buvo prasidėję religiniai karai, trukę iki pat amžiaus pabaigos bei turėję įtakos ir F. Vijeto gyvenimui.

F. Vijetas 1570 metais nuvyko į Paryžių. Po trejų metų Karolis IX paskyrė F. Vijetą dirbti Brittany et Rennes, jam atiteko patarėjo pareigos parlamente. Po Karolio IX mirties, 1574 metais Prancūziją valdyti ėmus Henrikui (*Henry*) III, F. Vijetas 1580 metais buvo paskirtas karališkuoju asmeniniu patarėju ir grįžo į Paryžių. Vėliau ir vėl paliko Paryžių — nuvyko į Beauvior-sur-Mer miestą. Penkerius metus ten gyvendamas jis galėjo atsidėti vien tik matematikos studijoms.

1589 metais Henriko III pakviestas F. Vijetas vėl grįžo dirbti į parlamentą, šįkart į Tours miestą. Dar vėliau, vykstant karui tarp Prancūzijos ir Ispanijos, F. Vijetą dirbti pakvietė Henrikas IV. F. Vijetas pradėjo dirbti ne kaip valdininkas, o kaip kriptoanalitikas — jis iššifruodavo slaptus karaliaus ir Prancūzijos priešininkų laiškus.

Po karo F. Vijetas dar du kartus buvo grįžęs į Paryžių ir 1603 metų vasario 23 dieną ten mirė.

Nors F. Vijetas niekada nebuvo profesionalus matematikas, tačiau matematikai pašventė labai daug laiko ir paliko nemažai reikšmingų atradimų.

Gyvendamas Tours mieste 1592 metais jis skaitė paskaitas, kuriose svarstė tuo metu aktualius matematikos klausimus, teigė, kad egzistuoja kampo trisekcijos, skritulio kvadratūros ir kubo dvigubinimo uždavinių sprendimai, bet visi anksčiau paskelbti šių nuo Antikos laikų žinomų uždavinių sprendimai yra klaidingi.

Pirmąjį savo mokslinį darbą, kuriame matematiką susiejo su astronomija, kosmologija, F. Vijetas paskelbė 1571 metais. Tai buvo traktatas „Matematikos kanonas su trigonometrijos priedu" (*Canon mathematicus, sue ad triangula cum appendicibus*).

Tours mieste 1591 metais išleistoje knygoje „Įžanga į analizės meną" (*In artem analyticam isagoge*) F. Vijetas pradėjo sisteminti algebrinius žymėjimus. Jis pirmasis skaičius pasiūlė žymėti raidėmis: nežinomuosius — balsėmis, žinomuosius — priebalsėmis. Iki šių dienų išliko vėliau Dekarto pasiūlytas būdas: abėcėlės pradžios raidėmis žymėti — žinomiesiems, pabaigos — nežinomiesiems.

Dideli F. Vijeto nuopelnai tobulinant ir plėtojant lygčių teoriją. F. Vijetas surado antrojo, trečiojo ir ketvirtojo laipsnių lygčių sprendimų metodus. Gali būti, kad jis pirmasis pavartojo žodį „koeficientas".

Geometrinius kubo dvigubinimo, kampo trisekcijos ir kitų uždavinių sprendimus F. Vijetas paskelbė 1593 metais knygoje „Supplementum geometriae". Tais pačiais metais pasirodė antroji knyga. Tai Tours mieste skaitytų paskaitų medžiaga, kurioje jis nagrinėja minėtus uždavinius. Šioje knygoje F. Vijetas taip pat paskelbė, kaip rasti skaičių $\pi$ su devyniais tiksliais ženklais skaičiuojant 393 216-kampio perimetrą. Šį būdą F. Vietas surado 1579 metais, tačiau tai nebuvo didelis atradimas, nes jau prieš gerą amžių skaičius $\pi$ buvo rastas šešiolikos ženklų tikslumu.

Vienas mums žinomiausių F. Vijeto rezultatų yra vadinamoji Vijeto teorema, kurią šiame straipsnyje panagrinėsime išsamiau. Vijeto teorema sieja algebrinės lygties sprendinius ir jos koeficientus. Įdomu tai, kad 1591 metais šią teoremą F. Vijetas įrodė tik teigiamųjų sprendinių atveju. Kad ji teisinga bendruoju atveju, 1626 metais įrodė olandų matematikas Albertas Žiraras (*Albert Girard*, 1592–1632).

## Vijeto teorema ir jos taikymai

Vijeto teoremą kvadratinei lygčiai kiekvienas matematika besidomintis moksleivis gerai žino iš mokyklinio algebros kurso.

***Vijeto teorema kvadratinei lygčiai.*** *Jei $x_1$ ir $x_2$ yra kvadratinės lygties $ax^2+bx+c=0$, $a \neq 0$, sprendiniai, tai $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ ir $x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}$.*

*Pastaba.* Tariame, kad kiekviena $n$-ojo laipsnio algebrinė lygtis turi $n$ nebūtinai skirtingų realiųjų arba kompleksinių sprendinių. Todėl teoremos formuluotėje nėra sąlygos $D \geqslant 0$.

Teisingas ir atvirkščias teiginys.

***Vijeto teoremos kvadratinei lygčiai atvirkštinė teorema.*** *Jei $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ ir $x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}$, tai $x_1$ ir $x_2$ yra kvadratinės lygties $ax^2+bx+c=0$, $a \neq 0$, sprendiniai.*

Vijeto teorema ir jai atvirkštinė formuluojamos ne tik kvadratinei, bet ir bet kuriai aukštesniojo laipsnio algebrinei lygčiai.

Jeigu $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ yra algebrinės lygties

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0, \tag{1}$$

$a_n \neq 0$, sprendiniai, tai kairiąją lygties pusę išskaidę tiesiniais dauginamaisiais, lygtį galime užrašyti šitaip:

$$a_n(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) = 0.$$

Kairiąją lygties pusę dar galime pertvarkyti, sudaugindami tiesinius dauginamuosius:

$$\begin{aligned} & a_n(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) = \\ & = a_nx^n - a_n(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n)x^{n-1} + \\ & + a_n(x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_1x_n + \dots + x_{n-1}x_n)x^{n-2} - \\ & - a_n(x_1x_2x_3 + \dots + x_1x_2x_n + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n)x^{n-3} + \\ & + \dots + (-1)^n a_n \cdot x_1x_2x_3 \cdot \ldots \cdot x_n. \end{aligned} \tag{2}$$

Kairiojoje ir dešiniojoje (1) ir (2) lygybių pusėse esantys daugianariai algebrine prasme lygūs, todėl lygūs ir jų koeficientai, t. y. teisingos šios lygybės:

$$\begin{aligned} & -a_n(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n) = a_{n-1}, \\ & a_n(x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_1x_n + \dots + x_{n-1}x_n) = a_{n-2}, \\ & - a_n(x_1x_2x_3 + \dots + x_1x_2x_n + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n) = a_{n-3}, \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & (-1)^n a_n \cdot x_1x_2x_3 \cdot \ldots \cdot x_n = a_0. \end{aligned}$$

Abi kiekvienos lygybių puses padaliję iš $-a_n$ arba iš $a_n$, gauname lygybes, vadinamas Vijeto formulėmis. Kartu įrodome ir Vijeto teoremą $n$-ojo laipsnio algebrinei lygčiai.

**Vijeto teorema $n$-ojo laipsnio lygčiai.** *Jeigu $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ yra n-ojo laipsnio lygties $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$, $a_n \neq 0$, sprendiniai, tai*

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \\ & x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_1x_n + \dots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}, \\ & x_1x_2x_3 + \dots + x_1x_2x_n + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}, \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & x_1x_2x_3 \cdot \ldots \cdot x_n = (-1)^n \cdot \frac{a_0}{a_n}. \end{aligned}$$

Skaitytojui paliekame suformuluoti Vijeto teoremai atvirkštinę ir įsitikinti jos teisingumu.

Panagrinėkime keletą uždavinių, kuriuos spręsdami galime pasinaudoti Vijeto formulėmis.

**1 pavyzdys.** *Nespręsdami lygties $9x^3 - 27x^2 + 20x - 4 = 0$, apskaičiuokime $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$; čia $x_1, x_2, x_3$ — lygties sprendiniai.*

*Sprendimas.* Kadangi $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2}{x_1x_2x_3}$, o pagal Vijeto teoremą $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{20}{9}$ ir $x_1x_2x_3 = \frac{4}{9}$, tai $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 5$.

*Atsakymas.* 5.

**2 pavyzdys.** *Sudarykime algebrinę lygtį, kurios sprendiniai būtų skaičiai $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$, $\frac{1}{x_3}$ ir $\frac{1}{x_4}$; čia $x_1$, $x_2$, $x_3$ ir $x_4$ — lygties $3x^4 - 3x^3 - x^2 + 7x - 2 = 0$ sprendiniai.*

*Sprendimas.* Lygties laisvasis narys lygus $-2$, todėl $x_1, x_2, x_3, x_4 \neq 0$. Ieškomosios lygties $x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0 = 0$ koeficientus rasime pasinaudoję Vijeto teorema. Parašykime Vijeto teoremos lygybes duotajai lygčiai: $x_1+x_2+x_3+x_4 = 1$, $x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4 = -\frac{1}{3}$, $x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4 = -\frac{7}{3}$, $x_1x_2x_3x_4 = -\frac{2}{3}$. Pritaikę Vijeto formules randame ieškomosios lygties koeficientus:

$$
\begin{aligned}
a_3 &= -\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}\right) = -\frac{x_2x_3x_4 + x_1x_3x_4 + x_1x_2x_4 + x_1x_2x_3}{x_1x_2x_3x_4} = -\frac{7}{2},\\
a_2 &= \frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_1x_3} + \frac{1}{x_1x_4} + \frac{1}{x_2x_3} + \frac{1}{x_2x_4} + \frac{1}{x_3x_4} =\\
&= \frac{x_3x_4 + x_2x_4 + x_2x_3 + x_1x_4 + x_1x_3 + x_1x_2}{x_1x_2x_3x_4} = \frac{1}{2},\\
a_1 &= -\left(\frac{1}{x_1x_2x_3} + \frac{1}{x_1x_2x_3} + \frac{1}{x_1x_2x_3} + \frac{1}{x_1x_2x_3}\right) = -\frac{x_4 + x_3 + x_2 + x_1}{x_1x_2x_3x_4} = \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

ir

$$
a_0 = \frac{1}{x_1x_2x_3x_4} = -\frac{3}{2}.
$$

Taigi ieškomoji lygtis yra $x^4 - \frac{7}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} = 0$. Ją padauginę iš 2, gauname lygtį su sveikaisiais koeficientais: $2x^4 - 7x^3 + x^2 + 3x - 3 = 0$.

*Atsakymas.* $2x^4 - 7x^3 + x^2 + 3x - 3 = 0$.

Šias užduotis pabandykite išspręsti savarankiškai.

1 *užduotis.* Tegu $x_1, x_2, x_3$ yra lygties $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$ sprendiniai. Nespręsdami lygties apskaičiuokite:

a) $\frac{x_1x_2}{x_3} + \frac{x_1x_3}{x_2} + \frac{x_2x_3}{x_1}$; b) $x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2$.

2 *užduotis.* Lygtis $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ turi tris sprendinius $x_1, x_2$ ir $x_3$. Apskaičiuokite $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$.

3 *užduotis.* Sudarykite kubinę algebrinę lygtį su sveikaisiais koeficientais, kurios sprendiniai būtų lygūs $\frac{x_1}{x_2x_3}$, $\frac{x_2}{x_1x_3}$, $\frac{x_3}{x_1x_2}$; čia $x_1, x_2, x_3$ — lygties $6x^3 - x^2 - 5x + 2 = 0$ sprendiniai.

**3 pavyzdys.** *Vienas lygties $x^3+px-6 = 0$ sprendinys yra du kartus didesnis už kitą. Išspręskime lygtį ir raskime parametro $p$ reikšmę.*

*Sprendimas.* Tarkime, lygties $x^3 + px - 6 = 0$ sprendiniai yra $x_1$, $x_2 = 2x_1$ ir $x_3$. Pagal Vijeto teoremą $3x_1 + x_3 = 0$, $2x_1^2x_3 = 6$. Išsprendę lygčių sistemą

$$
\begin{cases} 3x_1 + x_3 = 0,\\ 2x_1^2x_3 = 6, \end{cases}
$$

randame: $x_1 = -1$, $x_2 = 2x_1 = -2$ ir $x_3 = 3$. Vadinasi, $p = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -7$.

*Atsakymas.* $x \in \{-2; -1; 3\}$, $p = -7$.

**4 pavyzdys.** *Trys lygties $x^4 - 7x^3 + 18x^2 + px + q = 0$ sprendiniai yra lygūs sveikieji skaičiai. Raskime lygties sprendinius ir parametrų $p$ bei $q$ reikšmes.*

*Sprendimas.* Pagal sąlygą $x_1 = x_2 = x_3 = t$, $t \in \mathbf{Z}$. Pasinaudoję Vijeto teorema, gauname, kad $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$, t. y. $3t + x_4 = 7$, ir $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 18$, t. y.

$3t^2 + 3tx_4 = 18$. Išsprendę lygčių sistemą

$$\begin{cases} 3t + x_4 = 7, \\ 3t^2 + 3tx_4 = 18, \end{cases}$$

randame $t = x_1 = x_2 = x_3 = 2$, $x_4 = 1$. Tada $p = -(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4) = -20$ ir $q = x_1x_2x_3x_4 = 8$.

*Atsakymas.* $x \in \{1; 2\}$, $p = -20$, $q = 8$.

**5 pavyzdys.** *Lygties $x^3 - 9x^2 + px - 15 = 0$ sprendiniai sudaro aritmetinę progresiją. Raskime parametro $p$ reikšmę.*

*Sprendimas.* Pasinaudoję Vijeto teorema ir aritmetinės progresijos charakteristine savybe, gauname: $x_1 + x_2 + x_3 = 9$ ir $x_1 + x_3 = 2x_2$; iš čia $x_2 = 3$. Tada $3^3 - 9 \cdot 3^2 + 3p - 15 = 0$ ir $p = 23$.

*Atsakymas.* $p = 23$.

4 *užduotis.* Su kuriomis parametrų $a$, $b$, $c$ ($abc \neq 0$) reikšmėmis lygties $x^3 - ax^2 + bx + c = 0$ sprendiniai taip pat lygūs $a$, $b$, $c$?

5 *užduotis.* Raskite lygties $x^3 - mx^2 + 39x - 27 = 0$ parametro $m$ reikšmę, su kuria visi trys lygties sprendiniai sudaro geometrinę progresiją.

**6 pavyzdys.** *Išspręskime lygčių sistemą*

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ xy + xz + yz = 11, \\ x^{-1} + y^{-1} + z^{-1} = \frac{11}{6}. \end{cases}$$

*Sprendimas.* Kiekvienas skaičių trejetas $x$; $y$; $z$, tenkinantis šią simetrinę lygčių sistemą, taip pat yra ir tam tikros kubinės lygties sprendinių rinkinys. Dėl paprastumo tarkime, kad tai redukuota kubinė lygtis $t^3 + at^2 + bt + c = 0$. Pasinaudoję Vijeto teorema, gauname:

$$x + y + z = -a = 6, \qquad xy + xz + yz = b = 11,$$
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{yz + xz + xy}{xyz} = \frac{b}{c} = \frac{11}{6}.$$

Telieka išspręsti lygtį $t^3 - 6t^2 + 11t - 6 = 0$. Patikrinę randame, kad iš laisvojo nario daliklių aibės $\{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$ lygties sprendiniai yra skaičiai 1, 2 ir 3. Tai lygčių sistemos sprendiniai $(x; y; z)$ — visi kubinės lygties sprendinių kėliniai: $(1; 2; 3)$, $(1; 3; 2)$, $(2; 1; 3)$, $(2; 3; 1)$, $(3; 1; 2)$ ir $(3; 2; 1)$.

6 *užduotis.* Išspręskite lygčių sistemas:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 21, \\ xy + xz + yz = 14, \\ xyz = 8; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 6, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 20, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 72. \end{cases}$

*Užduočių atsakymai*: **1.** a) $10\frac{1}{6}$; b) 244; **2.** $3a(b + c) - a^3$; **3.** $4x^3 - 12x^2 - 29x + 1 = 0$; **4.** $a = c = 1$, $b = -1$; **5.** $m = 13$; **6.** a) visi skaičių 1, 2 ir 4 kėliniai; b) visi skaičių 0, 2 ir 4 kėliniai.