$\alpha + \omega$, 2003, Nr. 2, 30–35

Variacinis skaičiavimas

Bronius Kvedaras

Jau mokykloje sužinome, kaip ieškoti funkcijos minimalios ar maksimalios reikšmės. Tačiau tiek pačioje matematikoje, tiek jos taikymuose nuolat kyla žymiai sudėtingesni minimumo ar maksimumo uždaviniai: reikia rasti optimalią kreivę, figūros ar kūno formą. Panašūs uždaviniai sprendžiami variacinio skaičiavimo teorijoje. Jos raida ir problemos aptariamos šiame straipsnelyje.

Variacinis skaičiavimas — matematinė disciplina, kurioje labai akivaizdžiai galima pasekti matematikos plėtojimąsi, jos terminų ir sąvokų kitimą. Kaip ir diferencialinis ir integralinis skaičiavimas, kažkada tai buvo atskira disciplina, dėstoma universitetų studentams. Laikui bėgant, atsirado naujos sąvokos ir metodai: senamadiškas variacinis skaičiavimas modernėjo ir siaurąja prasme tapo funkcinės analizės skyriumi. Plačiąja prasme jis įsiliejo į optimalaus valdymo teoriją. Iš tiesų ši teorija pakartoja visus variacinio skaičiavimo raidos bruožus ir tokius pat (savo prigimtimi) tyrimo metodus, tiktai aukštesniu lygiu. Suprantama, optimalaus valdymo teorija rėmėsi jau ne klasikinės matematinės analizės, o funkcinės analizės, topologijos ir šiuolaikinės algebros metodais.

Atskiri variacinio skaičiavimo uždaviniai pradėti spręsti ir tirti labai seniai. Natūralu, kad įvairiose situacijose žmogus nori pasirinkti geriausią strategiją, palankiausią atlikimo variantą. Savo veiksmais jis nori pasiekti optimalių rezultatų. Taip atsiranda optimizavimo problemos — uždaviniai, kuriuos spręsdami turime maksimizuoti arba minimizuoti tam tikrus dydžius. Kai kurie iš šių uždavinių sprendžiami elementariais metodais, kiti reikalauja aukštosios matematikos elementų, o daugumai prireikia sudėtingų šiuolaikiškos matematikos metodų. Maža to, reikia naujų metodų ir svarbiausia — naujų sąvokų. Daugumos uždavinių „plikomis rankomis" imtis nepatartina. Prieš sprendžiant reikia pasirūpinti gera įranga, baze.

Visa variacinio skaičiavimo istorija — tai naujų metodų ir naujų sąvokų atsiradimo istorija. Įdomu pastebėti, kad daug matematikos sąvokų, sudarytų variacinio skaičiavimo reikmėms, tapo fundamentaliomis įvairių matematinių disciplinų sąvokomis. Kai kurios iš jų dabar net nesiejamos su variaciniu skaičiavimu.

Pavyzdžiui, *Oilerio variacija*, kažkada vaidinusi svarbiausią vaidmenį, perėjo į antrą planą, o vėliau tapo pagrindine funkcinės analizės sąvoka netiesinių operatorių arba funkcionalų išvestinėms apibrėžti. Oilerio–Lagranžo lema buvo tas kertinis akmuo, ant kurio po 200 metų buvo sukurta Švarco apibendrintųjų funkcijų teorija. Iškilosios figūros ir poliarės sąvokos atsirado variaciniame skaičiavime ir tik paskui perėjo į geometriją, topologiją, funkcinę analizę ir kitur. Apskritai be iškilumo sąvokos nebūtų daugybės rezultatų įvairiose matematikos šakose. Morso teorijos ir homologijų teorijos pagrindai taip pat sukurti variaciniame skaičiavime. Dabar tai atskiros topologijos disciplinos.

Be abejo, variacinis skaičiavimas savo reikmėms naudojo kitų matematikos disciplinų — aibių teorijos, diferencialinių lygčių, funkcinės analizės ir kt. — sąvokas ir metodus.

Nepaisant gana abstraktaus aparato, variacinio skaičiavimo tiek siaurąja, tiek ir plačiąja prasme negalima vadinti grynai teorine disciplina. Jos pagrindą ir dabar sudaro konkrečių ekonomikos, technikos, optikos, mechanikos, kosmonautikos (kaip į Marsą nusiųsti erdvėlaivį per trumpiausią laiką arba su mažiausiomis kuro sąnaudomis) ir kitų praktinių uždavinių sprendimas.

Istorijoje minima, kad pirmąjį variacinio skaičiavimo uždavinį praktiškai išsprendė moteris — Finikijos karalaitė, Kartagenos įkūrėja Elisa. Kai kurie istorikai ją vadina Didona, kiti teigia, kad tik po mirties Elisa buvo sudievinta ir po mirties pavadinta Didonos vardu. Apie 820 m. pr. Kr. mirė Triro (vienos svarbiausių Finikijos miestų-valstybių) karalius Mutonas, valdžią testamentu paskyręs savo vaikams — Pigmalionui ir Elisai. Elisa ištekėjo už savo dėdės Acherbaso, labai turtingo Melkarto, kuris buvo svarbiausias Triro dievas, garbinamas visoje Finikijoje ir Kartagenoje žynio. Jo šventovėje aukas sudėjo Aleksandras. Graikai jį tapatino su Herakliu ir garbino net krikščionybės laikais. Matyt, jie gviešėsi karaliaus sosto, nes Pigmalionas įsakė nužudyti Acherbasą ir jo šalininkus. Tuomet Elisa su saujele ištikimų vyrų pabėgo į Kiprą, prieš tai sudėjusi aukų Melkartui. Kipre prie jų prisidėjo Astartas (vyriausias Junonos žynys) su sąlyga, kad tame krašte, kur jie apsigyvens, žynystė bus jo šeimoje paveldima. Jie dar paėmė 80 merginų, kulto prostitučių, kad įtvirtintų finikiečių religijos nenutrūkstamumą, sėdo į laivus ir išplaukė. Audra pabėgėlius išmetė į Afrikos pakrantę, kur juos nedraugiškai sutiko čiabuviai. Tačiau Elisai pavyko susitarti, kad jie finikiečiams parduotų tokį žemės plotą, kokį gebės apjuosti jaučio oda. Elisa griebėsi gudrybės: ji įsakė odą supjaustyti siauromis juostelėmis ir jas surišti. Gautąja ilga juosta ji apjuosė skritulio formos žemės plotą, kurio viduje buvo kalva, ant kurios pastatė tvirtovę ir Kartagenos miestą. Kartu 813 ar 814 m. pr. Kr. ji išsprendė vadinamąjį izoperimetrinį variacinio skaičiavimo uždavinį: nurodyto ilgio kreive apjuosti didžiausio ploto sritį. Matematiškai šį uždavinį išsprendė Lagranžas praėjus daugiau kaip 1500 metų. Beje, senovės graikai jį buvo išsprendę elementariais metodais.

Vėliau Herbas, vietinis valdovas, pardavęs Elisai žemę ir leidęs įsikurti, nusprendė ją vesti grasindamas karu, jei ji atsisakytų. Elisa, trokšdama likti ištikima vyro atminimui, puolė į aukuro ugnį. Jos pavaldiniai šlovino ją kaip dievybę, įvedė jos kultą, kuris išsilaikė iki Kartagenos žlugimo. Elisos vardas buvo susietas ir galiausiai padavimuose sutapatintas su Didonos vardu, todėl dabar daug kas Kartagenos įkūrėją vadina Didona.

Matematiškai pirmąjį variacinio skaičiavimo — brachistochronos, greičiausio nusileidimo kreivės, uždavinį 1696 metais suformulavo ir išsprendė Johanas Bernulis. Be jo, ją sprendė Niutonas, Leibnicas, Lopitalis ir Jokūbas Bernulis. Šis uždavinys formuluojamas taip:

Vertikalioje plokštumoje, ne toje pačioje vertikalioje tiesėje yra du taškai A ir B (B žemiau negu A). Tarp visų kreivių, jungiančių šiuos taškus, reikia rasti tokią, kuria veikiamas tik svorio jėgos materialus taškas iš A į B nuriedės per trumpiausią laiką.

Suformuluokime klasikinį variacinį uždavinį. Yra 3 kintamųjų funkcija $f(x, y, y')$ ir plokštumoje xy du taškai $A(a, y_a)$ ir $B(b, y_b)$. Iš visų kreivių, jungiančių šiuos taškus ir turinčių išraiškas $y = y(x)$, reikia rasti tokią, kad integralas

$$I(y) = \int_a^b f(x, y, y')\,\mathrm{d}x \qquad (1)$$

vietoje y įrašius $y(x)$, o vietoj y' įrašius $(y(x))'$, įgytų mažiausią reikšmę.

Kaip spręsti šį uždavinį? Akivaizdu, kad jei $y_0(x)$ minimizuoja $I(y)$, tai kad ir kokia būtų leistina funkcija $y(x)$, $I(y) \geqslant I(y_0)$. (Funkcija vadinama leistina, jeigu jos grafikas jungia tuos pačius galinius taškus A ir B.) Jeigu $I(y) \geqslant I(y_0)$, tai dažnai $y(x) \geqslant y_0(x)$. Kartais tokias nelygybes išspręsti nesunku, deja, gautas sprendinys nebūtinai yra (dažniausiai taip ir atsitinka) variacinio uždavinio sprendinys. Pavyzdžiui, raskime trumpiausią atstumą tarp minėtų taškų A ir B. Kreivės $y = y(x)$ ilgis išreiškiamas formule

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\, \mathrm{d}x.$$

Sprendžiame variacinį uždavinį: ieškome tokios funkcijos $y(x)$, kad ilgis L būtų mažiausias. Akivaizdu, kad $\sqrt{1+y'^2} \geqslant 1$, todėl minimumas gaunamas, kai išvestinė $y' = 0$. Tada $y = c$ (c yra konstanta) apibrėžia tiesę, lygiagrečią su ašimi x. Kai $y_a \neq y_b$, ši tiesė nejungia taškų A ir B. Taigi gautoji funkcija nėra variacinio uždavinio sprendinys.

Tokių uždavinių sprendimo būdą pasiūlė Oileris. Jis surado paslaptingą ryšį tarp funkcionalą (sekdami šiuolaikiška terminologija taip toliau vadinsime (1) integralą) minimizuojančių kreivių ir diferencialinės lygties

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{y'} = f_y \tag{2}$$

sprendinių. Kadangi tai antrosios eilės diferencialinė lygtis, tai jos sprendiniai priklauso nuo dviejų konstantų. Vadinasi, sprendiniai sudaro kreivių šeimą. Šeimos kreives jis pavadino ekstremalėmis ir ieškomosios minimizuojančios kreivės siūlė ieškoti tarp jų. Dabar Oilerio metodu išspręsime suformuluotą uždavinį — rasime trumpiausią atstumą tarp taškų. Kadangi į L išraišką neįeina y, tai $L_y = 0$, o

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} L_{y'} = \frac{y''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}.$$

Tada (2) lygtis yra $y'' = 0$, nes $1 + y'^2 \neq 0$.

Šios lygties sprendiniai sudaro tiesių šeimą $y = cx + d$, iš kurių tiesė

$$y = \frac{y_b - y_a}{b - a} x + \frac{b y_a - a y_b}{b - a}$$

jungia taškus A ir B. Gavome gerai žinomą faktą, kad trumpiausią atstumą tarp plokštumos taškų nusako tiesė, jungianti tuos taškus.

Matome, kad Oileris samprotavo gyvenimiškai. Taip elgiasi ir tardytojas, kai tiria nusikaltimą. Remdamasis bylos duomenimis, jis sudaro įtariamųjų sarašą ir paskui tikrina versijas. Vienas iš įtariamųjų turėtų būti nusikaltėlis. Žinoma, taip būna ne visada. Ir Oilerio receptas ne visada tinka, tačiau jis ir jo amžininkai galvojo kitaip — receptą laikė visagaliu. Lagranžas, įvedęs atitinkamus daugiklius, šiuo metodu išsprendė izoperimetrinius uždavinius, kuriuose (1) funkcionalo minimumą reikia rasti, kai nurodytos papildomos sąlygos

$$\int_a^b g_i(x, y, y')\, \mathrm{d}x = c_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m; \tag{3}$$

čia c_i — žinomi skaičiai.

Toks ir Elisos–Didonos uždavinys — ieškoti integralo $\int_a^b y\, \mathrm{d}x$ minimumo (ploto), kai $\int_a^b \sqrt{1+y'^2} = l$; čia l — kreivės ilgis. Lagranžas pasiūlė įvesti skaitinius daugiklius ir izoperimetrinį uždavinį pakeisti paprastu variaciniu uždaviniu — ieškoti minimumo funkcionalo

$$\int_a^b \Big(f(x, y, y') + \sum_{i=1}^m c_i g_i(x, y, y') \Big)\, \mathrm{d}x. \tag{4}$$

Kadangi Elisos–Didonos uždavinyje ieškome uždaros figūros ploto ($a = b$), tai tokiu būdu uždavinį suformuluotume nekorektiškai. Patogiausia įvesti polines koordinates, koordinačių pradžią paimti figūros viduje, integravimo rėžius pasirinkti nuo 0 iki 2 ir, įvedus Lagranžo daugiklį, galima parašyti funkcionalą. Nusikalsdami griežtumui, palikę nekeistus rėžius, turėtume funkcionalą

$$\int_a^b \Big(y + \lambda\sqrt{1+y'^2} \Big)\, \mathrm{d}x.$$

Parašę Oilerio lygtį ir sykį suintegravę, gauname

$$y - C_1 = \frac{-\lambda}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Įveskime parametrą t ir pažymėkime $y' = \operatorname{tg} t$. Tada $y - C_1 = -\lambda \cos t$, o $x - C_2 = \lambda \sin t$. Pakėlę kvadratu ir sudėję, gauname apskritimų šeimą $(y - C_1)^2 + (x - C_2)^2 = 2$, t. y. apskritimų su centrais taškuose $(C_1; C_2)$ ir spinduliu λ šeima — Oilerio ekstremales, tarp kurių yra minimizuojančioji. Dvi konstantos randamos iš variacinio uždavinio sąlygų, o trečioji — iš kreivės ilgio integralo.

Oileris samprotavo taip: jei $y_0(x)$ minimizuoja funkcionalą $I(y)$, tai kad ir kokia būtų funkcija $z(x)$, tenkinanti sąlygas $z(a) = z(b) = 0$, funkcija $y_0(x) + \alpha z(x)$ bus leistinoji ir $I(y_0 + \alpha z) \geqslant I(y_0)$. Bet $I(y_0 + \alpha z) = u(\alpha)$ yra skaliarinio kintamojo α funkcija, įgyjanti taške $\alpha = 0$ minimumą. Vadinasi, $u'(0) = 0$. Remdamasis šiais samprotavimais, jis išdiferencijavo integralą ir gavo variacijas bei (2) diferencialinę lygtį. Oileris nepilnai, o Lagranžas griežtai įrodė variacijų egzistavimą, ir tai buvo preliudija į Švarco apibendrintąsias funkcijas. Pateiktieji Oilerio samprotavimai, nors ir labai subtilūs ir reikšmingi, turi vieną trūkumą. Juose *a priori* konstatuojamas sprendinio egzistavimas. Be to, sprendinys turi turėti antrąją išvestinę. Loginę tokių samprotavimų spragą labai vaizdžiai demonstruoja Perono paradoksas:

Sakykime, N yra didžiausias teigiamas skaičius. Kadangi $N^2 > N$, kai $N \neq 1$, tai $N = 1$.

Taip gali atsitikti ir taikant Oilerio metodą: $I(y)$ gali neturėti sprendinio, gali būti neišsprendžiama diferencialinė lygtis, tarp ekstremalių reikšmių gali nebūti minimizuojančios (tarp įtariamųjų — nusikaltėlio). Būtinos sąlygos — dar ne viskas. Jei yra smėlis, tai nebūtinai jame bus aukso.

Tačiau beveik 100 metų matematikai naudojosi Oilerio metodu visai negalvodami apie tai ir tik Vejerštrasas pabandė jį peržiūrėti ir pakelti į reikiamą lygį. Bendru atveju egzistavimo neįrodė (tai nepadaryta ir dabar), bet pirmasis gavo pakankamas sąlygas. Po jo variaciniu skaičiavimu imta labai domėtis ir buvo gauta naujų esminių rezultatų. Bet kai kurių universitetų kursuose ši disciplina dar ir dabar dėstoma Oilerio lygiu arba visai nedėstoma. Antra vertus, Oilerio ir Lagranžo idėjos, nors rėmėsi ne tokia jau gera logika, suvaidino milžinišką vaidmenį matematikoje.

Be egzistencijos, iškilo ir kita nemažiau svarbi problema, pareikalavusi daug darbo ir naujų sąvokų, kurios savo ruožtu visai pakeitė matematikos veidą ir be jų neįmanoma įsivaizduoti šiuolaikiškos matematikos. Jau sprendžiant minimalaus sukimosi paviršiaus uždavinį, Oilerio metodu ieškant ekstremalių, reikia papildomų apribojimų. Mažiausio ploto paviršiaus — Plato uždavinys tebetiriamas ir dabar. Jis labai domina statybininkus ir fizikus. Juo domėjosi Lietuvos matematikas M. Sapagovas. Pagal jo skaičiavimus Ukrainoje buvo suprojektuoti kelių visuomeninių pastatų originalūs stogai. Įdomiausia tai, kad uždavinio sprendinį galima realizuoti muilo plėvelėmis. Užtenka iš vielikės padaryti karkasą ir ant jo muilo plėvelė modeliuos minimalųjį paviršių. Daug rūpesčių sukėlė Niutono mažiausio pasipriešinimo uždavinys:

Raskite tokią dujose besisukančio kūno formą $y = y(x)$, kai $y(0) = 0$, $y(a) = b$, kad kūnas justų mažiausią pasipriešinimą.

Čia funkcionalas

$$I(y) = \int_0^a \frac{x}{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x,$$

Oilerio lygtis yra

$$\frac{xy'}{(1 + y'^2)^2} = C.$$

Buvo rastos ekstremalės, tarp jų ir „minimizuojančioji“ — jungianti nurodytus taškus, bet uždavinys nebuvo išspręstas. Aerodinamikai eksperimentuodami pastebėjo, kad pagal apskaičiuotą minimalų profilį pagamintas objektas nėra optimalus. Paaiškėjo, kad aerodinaminiame vamzdyje dujų srovei mažiau pasipriešina kitokio profilio kūnai. Kuo labiau dantytas profilis, tuo mažesnis pasipriešinimas. Iš tikrųjų Niutono dėsnis netikslus, o uždavinys neturi sprendinio. Uždavinys vienareikšmiškai išsprendžiamas tik esant papildomai sąlygai $y' > 0$ ir, be to, sprendinys netolydus. Tada pastebėta, kad Oilerio metodu rasta „minimizuojanti funkcija“ $y_0(x)$ neminimizuoja funkcionalo, nes $I(y_0) > 0$, o leistinų funkcijų seka

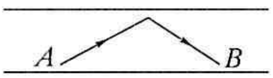
$$y_n = \frac{b}{a}\left(x - b\sin^2 n\frac{\pi}{a}x\right)$$

turi tą savybę, kad $I(y_n)$ riba lygi nuliui. Taigi funkcionalą minimizuojanti funkcija turi funkcionalą anuliuoti. Bet leistinos funkcijos y_n yra pjūklinės ir seka ribos neturi. Vadinasi, reikėjo revizuoti kreivės sąvoką.

Niutono uždavinį galima laikyti neteisingai arba nekorektiškai suformuluotu.

Panagrinėkime tokį grynai praktišką uždavinį. Jachta reikia kuo greičiau nuplaukti iš punkto A į punktą B.

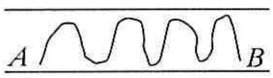
a) Kanalas platus, vėjas priešinis. Plauksite, kaip parodyta 1 paveiksle:



1 pav.

b) Kanalas siauras. Vėjas priešinis. Zigzagų bus kur kas daugiau.

c) Upės srovė priešinga vėjo krypčiai. Jachta sukiosis apie upės vidurį. Jos kelias primins piūklo dantis (2 pav.).



2 pav.

Panašus yra Maksvelo uždavinys. Keliautojas iš kalno papėdės trumpiausiu keliu nori pasiekti viršūnę. Jei kalno paviršius glodus, reikia judėti geodezine linija. Jeigu ne — bus stačių skardžių, uolų ir einant trumpiausiu keliu teks kilti į juos. Slidininkai ir alpinistai naudoja žingsnį, vadinamą eglute. Taigi jie daug anksčiau žinojo tokias kreives, kurios vėliau matematikams kėlė daugybę rūpesčių. Tiesa, jų eglutė turi tik baigtinį skaičių kampų, o matematikų eglutė — be galo daug.

Dabar sakykime, kad mūsų keliautojas negali įlipti į skardį, kurio kampas didesnis už α. Maksvelas nustatė: kai kalnas iškilas, reikia eiti skardžiu aplink, į kalną kopiant kampu, mažesniu už α, o kur nėra skardžio — geodezine linija. Jeigu kalnas neiškilas, yra griovų, galima patekti ne į tą viršūnę. Tačiau Maksvelo uždavinys išsprendžiamas ir jo sprendinys yra kreivė, sudėliota gabalais iš geodezinių ir apibendrintųjų, t. y. vadinamoji begalinė eglutė. Įdomu palyginti teoretiko ir praktiko požiūrius į variacinių uždavinių sprendimą. Jį gerai iliustruoja tokia sakmė. Du broliai — matematikas ir inžinierius kalnuose nusipirko vilą. Iki jos reikėjo nutiesti kelią. Abu norėjo, kad kelias būtų kuo trumpesnis ir juo būtų galima važiuoti automobiliu. Matematikas, prisiminęs studijų laikus, sudarė funkcionalą ir išsprendęs rado, kad kelio ilgis turi būti 35 km, o jo tiesimas turėtų kainuoti 150 000 Lt. Inžinierius, remdamasis kitais principais, matematiškai kalbant, aproksimavo trasą. Kelias pailgėjo iki 37 km, o tiesimo kaina — 70 000 Lt. Taigi darosi nebeaišku, ar reikia teorinio optimalumo. Aišku, galima pridėti papildomą sąlygą, ribojančią kelio tiesimo išlaidas.

Kokios tos kreivės, tiksliau, funkcijos, atsiradusios tyrinėjant variacinius uždavinius? Viena tokių keistų funkcijų naudojosi fizikai. Ją žymėjo simboliu $\delta(x)$ ir vadino Dirako delta funkcija. Laikė ją visur lygia nuliui ir tik esant $x = 0$ laikė lygia begalybei, o integralą nuo jos — lygiu vienetui. Matematikai tokios funkcijos nepripažino ir fizikus kritikavo, bet pastarieji ja labai sėkmingai naudojosi tirdami potencialus, masę ir pan. Naudojantis šia funkcija gautus teorinius skaičiavimus paprastai patvirtindavo eksperimentais, todėl fizikams ji buvo absoliučiai normali kaip eksponentė ar bet kuri trigonometrinė funkcija. Tokių funkcijų užuomazga slypi Oilerio–Lagranžo lemoje. Jas į dienos šviesą iškėlė Sobolevas, apibrėžęs apibendrintąsias išvestines, ir galutinai apnuogino Švarcas, nuplėšęs misticizmo kaukę ir pavadinęs apibendrintosiomis funkcijomis (*Distribution*). Be šių funkcijų neįsivaizduojama šiuolaikiška matematika, ypač diferencialinių lygčių teorija.

Bet kaip jas tirti? Pačiupinėti negalima, nubraižyti ant lentos taip pat ne, įsivaizduoti — beveik ne, išskyrus delta funkciją. Apie kai kurias jų galima spręsti iš normalių funkcijų sekos, konverguojančios į apibendrintąją, savybių. Bet tokių yra vienetai. Belieka neakivaizdinė pažintis. Neakivaizdžiai mokosi studentai, susipažįsta poros, tai kodėl tuo nepasinaudoti čia. Taigi apie jas mes sprendžiame tik iš jų veikimo sąryšio su kitomis funkcijomis, kurias žinome. Toks tyrimo metodas nėra naujas; jis tikrai mokslinis ir labai plačiai naudojamas gyvenime, matematikoje ir kituose moksluose. Jo esmę gerai paaiškino Platonas. Pasak jo, visa, ką mes tiriame, tai tik seka šešėlių, kuriuos ant olos sienos meta lauke degantis laužas, kai pro jį kas nors praeina. Takas yra tarp laužo ir olos, o tyrėjas, būdamas oloje, nemato, kas taku eina. Apie viską sprendžia iš šešėlių. Bene įspūdingiausias pavyzdys — Koperniko heliocentrinė sistema. Ji sudaryta remiantis astronominiais stebėjimo duomenimis.

Tenka pažymėti, kad tokių klaidų, kokias darė Oileris ir Lagranžas, *a priori* sprendinį laikydami egzistuojančiu, nesąmoningai arba sąmoningai buvo daroma visais laikais. Svarbu, kad metodas, sudarytas ant silpno pamato, duodavo naudos. Net visai neseniai toje pačioje disciplinoje, tiksliau — jos šakoje, vadinamojoje optimalaus valdymo teorijoje, įrodinėjant Pontriagino maksimumo principą buvo elgiamasi taip pat, kaip darė Oileris ir Lagranžas. Optimalaus valdymo uždaviniuose reikia rasti funkcionalo

$$I(y,u)=\int_a^b F(x,y,u)\,\mathrm{d}x$$

minimumą, kai nurodyti papildomi ryšiai $y'=f(x,y,u)$, $y(a)=c$; čia u yra m-matis, o y, f, c — n-mačiai vektoriai. Pontriaginas teigė:

Tarkime, sprendinys egzistuoja, t. y. egzistuoja tokie valdymo parametrai (funkcijos) $u(x)$, kad jie ir diferencialinės lygties Koši uždavinio sprendinys $y(x)$ minimizuoja funkcionalą $F(y,u)$. Tada egzistuoja funkcijos $\psi_i(x)$, $i=1,2,3,\dots,n$, tenkinančios sistemą

$$\psi_i'=-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\psi_j,\qquad i=1,2,\dots,n,$$

ir hamiltonianas $H=(\psi,f)$ pasiekia maksimumą, pastovų ant optimalių trajektorijų.

Šitokia prielaida, matyt, buvo padaryta sąmoningai, nes metodas leido spręsti daugybę optimalaus valdymo uždavinių. Beje, Lagranžas taip pat mokėjo spręsti kai kuriuos optimalaus valdymo uždavinius. Jo λ — tai Pontriagino ψ. Be to, Pontriaginas žinojo, kad matematikai ištaisys metodo trūkumus, ypač apsiginklavę tokia galinga technika. Jis nesuklydo. Dabar padaryta labai daug. Bet nei optimalaus valdymo, nei klasikinis variacinis uždavinys iki galo neišspręsti.