$\alpha + \omega$, 2003, Nr. 2, 22–29

# *Inversijos apskritimų atžvilgiu*

Edmundas Mazėtis
edmundas@vpu.lt

*Mokydamiesi geometrijos mokykloje, susipažįstame su įvairiomis plokštumos transformacijomis: lygiagrečiuoju postūmiu, ašine ir centrine simetrijomis, posūkiu, homotetija ir kitomis. Visų šių geometrinių transformacijų bendra savybė yra ta, kad jomis taškai atvaizduojami į taškus, tiesės — į tieses, atkarpos — į atkarpas (nors ir ne visuomet to paties ilgio), kampai — į kampus, apskritimai — į apskritimus ir pan. Bet yra tokių transformacijų, kurios tieses „sulenkia" į apskritimus, o apskritimus „ištiesina" į tieses. Tokios transformacijos — tai inversijos. Nors iš pirmo žvilgsnio jos atrodo keistokai, tačiau geometrijoje plačiai taikomos ir palengvina daugelio uždavinių sprendimą.*

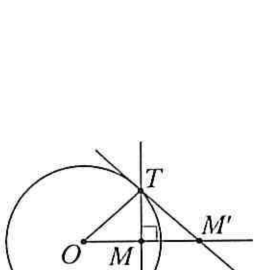
## 1. Inversijos sąvoka

Sakykime, kad plokštumoje yra apskritimas $I$, kurio centras — taške $O$, o spindulys lygus $R$. Taškai $M$ ir $M'$ yra vadinami *inversiniais apskritimo I atžvilgiu*, jei taškas $M'$ yra spindulyje $OM$ ir $OM \cdot OM' = R^2$. Apskritimo centras $O$ neturi inversinio taško.

Plokštumos transformacija, kuria kiekvienas plokštumos taškas $M$ atvaizduojamas į jam inversinį tašką $M'$ apskritimo $I$ atžvilgiu, yra vadinama *inversija apskritimo I atžvilgiu*. Apskritimas $I$ yra vadinamas *inversijos apskritimu*, jo centras $O$ — *inversijos centru*. Inversijos centras $O$ neatvaizduojamas į jokį plokštumos tašką ir jis nėra jokio plokštumos taško vaizdas.

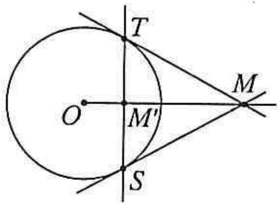
Iš apibrėžimo matome: jei taškas $M$ atvaizduojamas į tašką $M'$, tai taško $M'$ vaizdas yra taškas $M$. Taigi du kartus atlikę tą pačią inversiją, gauname tapatingąją plokštumos transformaciją. Kaip žinome, tokia savybė būdinga ir ašinei bei centrinei simetrijoms.

Jei taškas $M$ yra inversijos apskritimo $I$ viduje, tai $OM < R$. Tuomet iš inversijos apibrėžimo gauname, kad $OM' > R$, t. y. taško $M$ vaizdas yra inversijos apskritimo išorėje. Analogiškai parodoma, kad inversijos apskritimo išorėje esančio taško vaizdas yra inversijos apskritimo viduje, o jei taškas $M$ yra inversijos apskritime, tai jis atvaizduojamas pats į save. Iš pirmo žvilgsnio atrodantis keistas faktas, kad „nedidelis" skritulys atvaizduojamas (ir, be to, abipusiškai vienareikšmiškai) į begalinę sritį, esančią jo išorėje, neturėtų stebinti: tiek skritulio viduje, tiek jo išorėje yra be galo daug taškų.




1 pav.

Dabar išsiaiškinsime, kaip rasti taškų inversinius vaizdus. Sakykime, kad taškas $M$ yra inversijos apskritimo $I$ viduje (1 pav.).

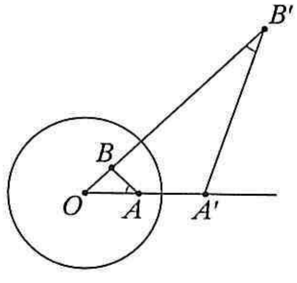


2 pav.

Nubrėžkime spindulį $OM$ ir iš taško $M$ iškelkime jam statmenį (1 pav.); šis statmuo kerta apskritimą taškuose $T$ ir $S$. Per vieną šių taškų (pvz., tašką $T$) brėžiame inversijos apskritimo liestinę, kuri kirs spindulį $OM$ taške $M'$. Iš trikampių $OTM$ ir $OM'T$ panašumo gauname $\frac{OM}{OT} = \frac{OT}{OM'}$, t. y. $OM \cdot OM' = OT^2 = R^2$, todėl taškas $M'$ yra taško $M$ inversinis vaizdas. Jei taškas $M$ yra inversijos apskritimo išorėje (2 pav.), tai per jį brėžiame apskritimo liestines $MT$ ir $MS$; tiesių $OM$ ir $ST$ sankirtos taškas $M'$ yra taško $M$ inversinis vaizdas. Įrodoma taip pat, kaip ir ankstesniu atveju.

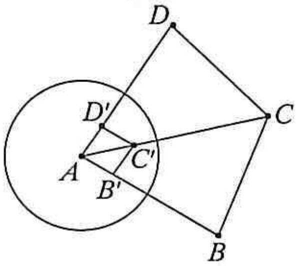
**1 pavyzdys.** Inversija, kurios centras yra taške $O$, o spindulys lygus $R$, taškai $A$ ir $B$ atvaizduojami į taškus $A'$ ir $B'$. Įrodysime, kad

$$A'B' = \frac{R^2 \cdot AB}{OA \cdot OB}. \tag{1}$$



3 pav.

Pastebime, kad trikampiai $OAB$ ir $OB'A'$ turi bendrą kampą $O$ ir pagal inversijos apibrėžimą $OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = R^2$, t. y. $\frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'}$ (3 pav.). Trikampiai $OAB$ ir $OB'A'$ yra panašūs, todėl $\frac{AB}{B'A'} = \frac{OA}{OB'}$. Taigi $\frac{A'B'}{AB} = \frac{OB'}{OA} = \frac{OB'}{OA} \cdot \frac{OB}{OB} = \frac{R^2}{OA \cdot OB}$. Iš čia ir gaunama (1) lygybė. Pastebėkime, kad inversija keičia atstumus tarp taškų, nes iš įrodytos lygybės gauname, jog $AB = A'B'$ tada ir tik tada, kai $OA \cdot OB = R^2$; bendru atveju $AB \neq A'B'$.



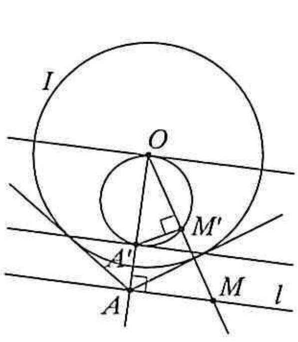
4 pav.

**2 pavyzdys.** Įrodykime, kad bet kokiam keturkampiui $ABCD$ yra teisinga nelygybė $AB \cdot CD + BC \cdot AD \geqslant AC \cdot BD$.

Nagrinėkime inversiją su centru taške $A$ ir bet kokiu spinduliu $R$. Taškai $B$, $C$, $D$ atvaizduojami į taškus $B'$, $C'$, $D'$ (4 pav.), kuriems teisinga trikampio nelygybė $B'C' + C'D' \geqslant B'D'$. Pasinaudoję (1) lygybe, gauname nelygybę $\frac{R^2 \cdot BC}{AB \cdot AC} + \frac{R^2 \cdot CD}{AC \cdot AD} \geqslant \frac{R^2 \cdot BD}{AB \cdot AD}$. Padauginę abi šios nelygybės puses iš $\frac{AB \cdot AC \cdot AD}{R^2}$, gauname ieškomą nelygybę.

## 2. Tiesių ir apskritimų inversiniai vaizdai

Sakykime, kad inversija apskritimo $I$ su centru $O$ ir spinduliu $R$ atžvilgiu taškai $A$ ir $B$ atvaizduojami į taškus $A'$ ir $B'$. Kaip jau matėme 1 pavyzdyje, trikampiai $OAB$ ir $OB'A'$ yra panašūs. Ši svarbi inversijos savybė padeda braižant tiesių ir apskritimų inversinius vaizdus.



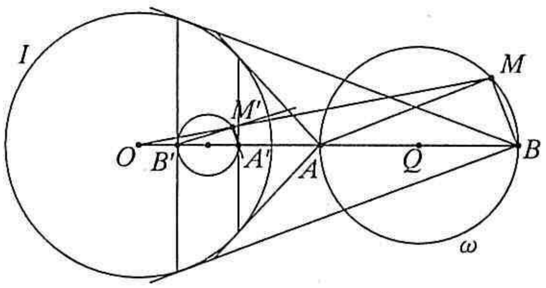
5 pav.

Sakykime, kad tiesė $l$ eina per inversijos centrą $O$. Pagal inversijos apibrėžimą bet kuris tiesės $l$ taškas atvaizuojamas į tašką, esantį tiesėje $l$, todėl tiesė $l$, einanti per inversijos centrą, atvaizuojama pati į save.

Jei tiesė $l$ neina per inversijos centrą $O$, tai brėžiame statmenį $OA \perp l$ (5 pav.) ir randame taško $A \in l$ inversinį vaizdą $A'$. Jei kito tiesės $l$ taško $M$ vaizdas yra taškas $M'$, tai pagal įrodytą inversijos savybę $\angle OAM = \angle OM'A'$. Bet $\angle OAM = 90°$, todėl ir kampas $OM'A'$ yra status. Taigi taškas $M'$ yra apskritime, kurio skersmuo yra atkarpa $OA'$. Todėl tiesės, neinančios per inversijos centrą $O$, vaizdas yra apskritimas, einantis per inversijos centrą (aišku, taškas $O$ nėra jokio taško vaizdas, todėl tiksliau sakome, kad tiesės, neinančios per inversijos centrą vaizdas yra apskritimas be taško $O$, einantis per inversijos centrą). Be to, taške $O$ šio apskritimo liestinė yra lygiagreti su tiese $l$.

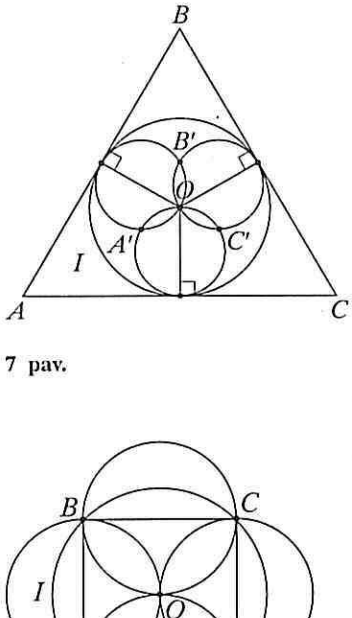
**1 užduotis.** *Įrodykite, kad apskritimo $\omega$, einančio per inversijos centrą $O$ (be taško $O$), vaizdas yra tiesė, neinanti per inversijos centrą ir lygiagreti su apskritimo $\omega$ liestine taške $O$.*

Sakykime, kad apskritimas $\omega$ neina per inversijos centrą $O$. Sujunkime jo centrą $Q$ su inversijos centru tiese, kertančia apskritimą $\omega$ taškuose $A$, $B$, ir raskime šių taškų vaizdus $A'$, $B'$ (6 pav.).



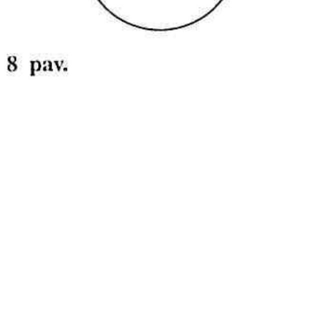

6 pav.

Imkime bet kokį apskritimo $\omega$ tašką $M$, kuris atvaizduojamas į tašką $M'$. Tuomet $\angle A'M'B' = \angle OM'A' - \angle OM'B'$. Bet $\angle OM'A' = \angle OAM$, $\angle OM'B' = \angle OBM$, $\angle OAM = \angle AMB + \angle ABM$ (pagal priekampio savybę). Todėl $\angle A'M'B' = \angle OM'A' - \angle OM'B' = \angle AMB + \angle ABM - \angle OBM = 90° + \angle OBM - \angle OBM = 90°$, t. y. taškas $M'$ yra apskritime, kurio skersmuo — atkarpa $A'B'$. Taigi apskritimo, neinančio per inversijos centrą vaizdas yra apskritimas, taip pat neinantis per inversijos centrą.



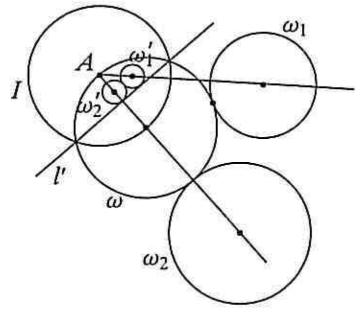

7 pav.

**3 pavyzdys.** Apibrėžto apie inversijos apskritimą $I$ lygiakraščio trikampio $ABC$ vaizdas yra figūra, sudaryta iš trijų lankų $\smile A'B'$, $\smile B'C'$ ir $\smile C'A'$, nes tiesės $AB$, $BC$ ir $CA$ atvaizduojamos į apskritimus, einančius per inversijos centrą $O$ ir liečiančius šias tieses (7 pav.). Kvadrato $ABCD$, įbrėžto į inversijos apskritimą $I$, vaizdas yra figūra, susidedanti iš apskritimų, einančių per taškų trejetus $(O, A, B)$, $(O, B, C)$, $(O, C, D)$, $(O, D, A)$, lankų, esančių inversijos apskritimo išorėje (8 pav.). Kvadrato $ABCD$ ribojamos plokštumos dalies vaizdas yra plokštumos dalis, ribojama minėtų apskritimų lankų ir esanti inversijos apskritimo išorėje. Taigi aprėžtų figūrų (tokių kaip kvadratas) inversiniai vaizdai gali būti neaprėžtos figūros.




8 pav.

**2 užduotis.** *Nubraižykite į inversijos apskritimą įbrėžto taisyklingojo trikampio vaizdą ir apie inversijos apskritimą apibrėžto taisyklingojo šešiakampio vaizdą. Nurodykite, į ką atvaizduojamos šių figūrų vidinės sritys.*



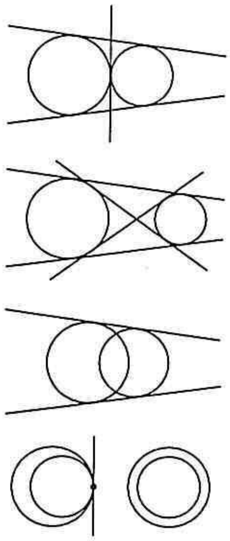

9 pav.

**3 užduotis.** *Nubraižykite rombo $ABCD$, kurio viršūnės $A$ ir $C$ yra inversijos apskritime, o viršūnės $B$ ir $D$ jam nepriklauso, inversinį vaizdą. Nurodykite, į kokią figūrą atvaizduojama šiuo rombu apribota plokštumos sritis.*

**4 pavyzdys.** Yra du apskritimai ir taškas $A$, nesantis nė vieno jų viduje. Išsiaiškinkime, kiek gali būti apskritimų, einančių per tašką $A$ ir liečiančių duotuosius apskritimus.

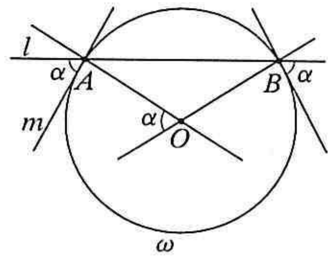
Sakykime, kad $\omega_1$ ir $\omega_2$ yra du apskritimai, o taškas $A$ nėra nė vieno jų viduje (9 pav.). Tarkime, kad apskritimas $\omega$ eina per tašką $A$ ir liečia apskritimus $\omega_1$ ir $\omega_2$. Nagrinėkime inversiją, kurios centras — taške $A$, o spindulys bet koks. Kaip įrodyta anksčiau, šia inversija apskritimai $\omega_1$ ir $\omega_2$ atvaizduojami į apskritimus $\omega_1'$ ir $\omega_2'$, o apskritimo $\omega$ vaizdas yra tiesė $l$, neinanti per inversijos centrą bei liečianti apskritimus $\omega_1'$ ir $\omega_2'$.

Taigi uždavinį naudojantis inversija galima suformuluoti paprasčiau: kiek yra tiesių, liečiančių du apskritimus $\omega_1'$ ir $\omega_2'$. Atsakymas į šį klausimą visiems žinomas: gali būti nuo 0 iki 4 tiesių, liečiančių du apskritimus (10 pav.). Atlikus tą pačią inversiją, apskritimai $\omega_1'$ ir $\omega_2'$ atvaizduojami į apskritimus $\omega_1$ ir $\omega_2$, tiesė $l'$ — į apskritimą, einantį per tašką $A$ ir liečiantį duotuosius apskritimus. Todėl atsakymas į uždavinio klausimą yra toks: priklausomai nuo apskritimų ir taško tarpusavio padėties, gali egzistuoti nuo 0 iki 4 apskritimų, einančių per duotąjį tašką ir liečiančių du duotuosius apskritimus.



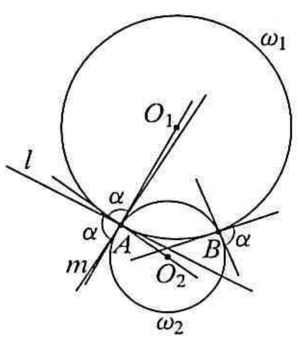
10 pav.

## 3. Inversija išlaiko kampus




11 pav.

Mokykloje per geometrijos pamokas dažniausiai nagrinėjami kampai tarp tiesių. Tačiau galima apibrėžti ir kampus tarp kitų susikertančių kreivių. Sakykime, kad tiesė $l$ kerta apskritimą $\omega$ taškuose $A$ ir $B$, o tiesė $m$ yra apskritimo $\omega$ liestinė taške $A$. Smailusis arba statusis kampas tarp tiesių $l$ ir $m$ yra vadinamas *kampu tarp tiesės $l$ ir apskritimo $\omega$*. Aišku, kad tas pats kampas gaunamas ir taške $B$ (11 pav.). Tiesė $l$ yra statmena apskritimui $\omega$, jei ji eina per apskritimo centrą; jei tiesė liečia apskritimą, tai kampas tarp jų lygus 0°. Jei apskritimai $\omega_1$ ir $\omega_2$ kertasi taškuose $A$ ir $B$, o tiesės $l$ ir $m$ yra šių apskritimų liestinės taške $A$, tai smailusis arba statusis kampas tarp tiesių $l$ ir $m$ yra vadinamas *kampu tarp apskritimų* $\omega_1$ ir $\omega_2$. Dėl simetrijos apskritimų centrus jungiančios tiesės atžvilgiu, tas pats kampas yra ir kitame jų sankirtos taške $B$ (12 pav.). Jei $O_1$ ir $O_2$ yra apskritimų centrai, tai kampas tarp apskritimų $\omega_1$ ir $\omega_2$ yra lygus kampui tarp tiesių $O_1A$ ir $O_2A$, nes šios tiesės yra statmenos apskritimų liestinėms $l$ ir $m$. Jei apskritimai $\omega_1$ ir $\omega_2$ liečiasi taške $A$, tai kampas tarp jų lygus 0°. Jei apskritimai (arba tiesė ir apskritimas) neturi bendrų taškų, tai kampas tarp jų neapibrėžtas.




12 pav.

Įrodysime svarbią teoremą, kuri dažnai vadinama pagrindine inversijos savybe.

**Teorema.** *Kampas tarp apskritimų* $\omega_1$ *ir* $\omega_2$ *(arba kampas tarp tiesių* $\omega_1$ *ir* $\omega_2$*, arba kampas tarp tiesės* $\omega_1$ *ir apskritimo* $\omega_2$*) yra lygus kampui tarp jų inversinių vaizdų* $\omega_1'$ *ir* $\omega_2'$.

*Įrodymas.* Išnagrinėsime keletą atvejų.

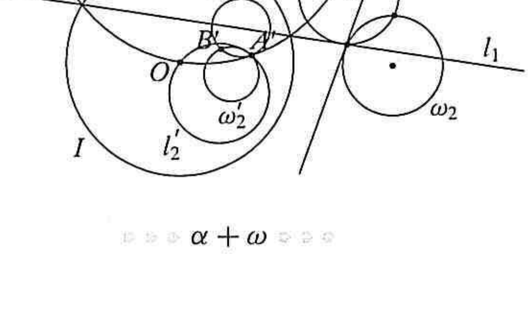
1. Jei $\omega_1$ ir $\omega_2$ yra tiesės, einančios per inversijos centrą $O$, tai jos atvaizuojamos į save ir šiuo atveju teorema teisinga.

2. Jei $\omega_1$ ir $\omega_2$ yra tiesės, neinančios per inversijos centrą $O$ ir susikertančios taške $A$, tai jų inversiniai vaizdai yra apskritimai, einantys per tašką $O$ ir tašką $A'$ — taško $A$ vaizdą. Šių apskritimų liestinės taške $O$ yra lygiagrečios su duotosiomis tiesėmis, todėl kampas tarp šių liestinių lygus kampui tarp duotųjų tiesių. Taigi šiuo atveju teorema teisinga.

3. Jei $\omega_1$ ir $\omega_2$ yra dvi lygiagrečios tiesės, nė viena iš kurių neina per inversijos centrą $O$, tai jų inversiniai vaizdai yra du taške $O$ besiliečiantys apskritimai (paaiškinkite, kodėl). Taigi ir tiesės, ir jų vaizdai sudaro 0° kampus.

4. Jei $\omega_1$ ir $\omega_2$ yra du apskritimai, einantys per inversijos centrą $O$, tai jų vaizdai yra dvi tiesės, neinančios per tašką $O$. Jei duotieji apskritimai taške $O$ kertasi, tai jie kertasi dar viename taške $A$. Todėl jų vaizdai — tiesės $l_1'$ ir $l_2'$ kertasi taške $A'$, kuris yra taško $A$ inversinis vaizdas. Kadangi tiesės $l_1'$ ir $l_2'$ yra lygiagrečios su apskritimų $\omega_1$ ir $\omega_2$ liestinėmis taške $O$, todėl kampas tarp tiesių $l_1'$ ir $l_2'$ lygus kampui tarp duotųjų apskritimų. Jei apskritimai $\omega_1$ ir $\omega_2$ taške $O$ liečiasi, tai jų vaizdai yra lygiagrečios tiesės (nes jei tos tiesės kirstųsi taške $A'$, tai jis būtų taško $A$, priklausančio abiem duotiesiems apskritimams, vaizdas). Taigi ir kampas tarp duotųjų apskritimų, ir kampas tarp jų vaizdų lygus 0°. Todėl ir šiuo atveju teoremos tvirtinimas yra teisingas.

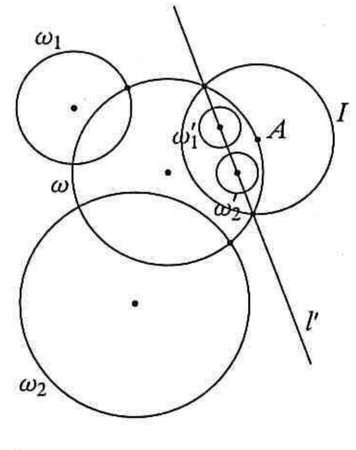
5. Jei $\omega_1$ ir $\omega_2$ yra du susikertantys apskritimai, neinantys per inversijos centrą $O$, tiesės $l_1$ ir $l_2$ — jų liestinės, išvestos sankirtos taške $A$ (13 pav.), tai šių liestinių vaizdai yra apskritimai $l_1'$ ir $l_2'$, einantys per inversijos centrą bei liečiantys duotųjų apskritimų vaizdus $\omega_1'$ ir $\omega_2'$ taške $A'$, kuris yra taško $A$ inversinis vaizdas. Kadangi apskritimai $l_1'$ ir $\omega_1'$ liečiasi taške $A'$, tai tame taške jų liestinės sutampa; analogiškai apskritimai $l_2'$ ir $\omega_2'$ taške $A'$ turi bendrą liestinę. Taigi kampas tarp apskritimų $\omega_1'$ ir $\omega_2'$ yra lygus kampui tarp apskritimų $l_1'$ ir $l_2'$. Bet remiantis 4 atveju kampas tarp apskritimų $l_1'$ ir $l_2'$ yra lygus kampui tarp tiesių $l_1$ ir $l_2$, t. y. kampui tarp duotųjų apskritimų.




13 pav.

Taigi kampas tarp apskritimų $\omega_1'$ ir $\omega_2'$ lygus kampui tarp apskritimų $\omega_1$ ir $\omega_2$, o tai ir reikėjo įrodyti.

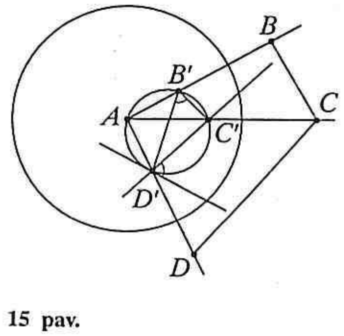
**4 užduotis.** *Baikite įrodyti teoremą, išnagrinėdami atvejus, kai* $\omega_1$ *ir* $\omega_2$ *yra: a) tiesė ir apskritimas, einantis per inversijos centrą; b) tiesė, einanti per inversijos centrą, ir apskritimas, neinantis per jį; c) tiesė, neinanti per inversijos centrą, ir apskritimas, einantis per jį; d) tiesė ir apskritimas, neinantys per inversijos centrą.*




**14 pav.**

**5 pavyzdys.** Sakykime, kad $\omega_1$ ir $\omega_2$ yra du apskritimai, taškas $A$ nepriklauso nė vienam iš jų. Įrodysime, kad egzistuoja vienintelis apskritimas, einantis per tašką $A$, statmenas duotiesiems apskritimams.

Tarkime, kad apskritimas $\omega$ eina per tašką $A$ ir statmenai kerta apskritimus $\omega_1$ ir $\omega_2$ (14 pav.). Nagrinėjame inversiją, kurios centras — taške $A$, o spindulys $R$ — bet koks. Šia inversija apskritimai $\omega_1$ ir $\omega_2$ atvaizduojami į apskritimus $\omega_1'$ ir $\omega_2'$, o apskritimas $\omega$ — į tiesę $l'$. Kadangi inversija nekeičia kampų, tai tiesė $l'$ yra statmena apskritimams $\omega_1'$ ir $\omega_2'$, taigi ji eina per šių apskritimų centrus. Vadinasi, egzistuoja vienintelė tiesė $l'$, statmena apskritimams $\omega_1'$ ir $\omega_2'$, jos inversinis vaizdas yra vienintelis apskritimas $\omega$, einantis per tašką $A$ ir statmenas duotiesiems apskritimams $\omega_1$ ir $\omega_2$. Pastebėkime, kad taškui $A$ esant apskritimų $\omega_1$ ir $\omega_2$ centrus jungiančioje tiesėje, per jį eina ne apskritimas, o tiesė, statmena duotiesiems apskritimams.



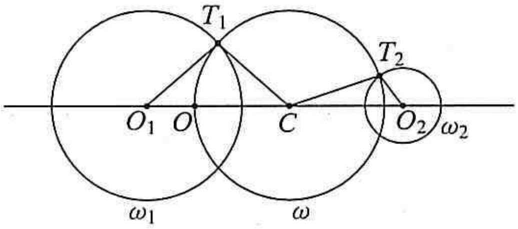

**15 pav.**

**6 pavyzdys.** Duotas iškilusis keturkampis $ABCD$. Apie trikampius $ABC$ ir $ABD$ apibrėžtų apskritimų sudaromas kampas yra lygus apie trikampius $ACD$ ir $BCD$ apibrėžtų apskritimų sudaromam kampui. Įrodysime tai.

Sakykime, kad $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ ir $\omega_4$ yra atitinkamai apie trikampius $ABC$, $ABD$, $ACD$ ir $BCD$ apibrėžti apskritimai. Atlikime inversiją, kurios centras — taške $A$, o spindulys bet koks. Taško $B$ vaizdas yra taškas $B'$, taško $C$ — taškas $C'$, o taško $D$ — taškas $D'$ (15 pav.). Tuomet apskritimo $\omega_1$ vaizdas yra tiesė $B'C'$, apskritimo $\omega_2$ vaizdas — tiesė $B'D'$, o pagal pagrindinę inversijos savybę kampas tarp apskritimų $\omega_1$ ir $\omega_2$ lygus kampui $C'B'D'$. Apskritimo $\omega_3$ vaizdas yra tiesė $C'D'$, o apskritimo $\omega_4$ — apskritimas, einantis per taškus $B'$, $C'$ ir $D'$. Taigi kampas tarp apskritimų $\omega_3$ ir $\omega_4$ yra lygus kampui tarp tiesės $C'D'$ ir apskritimo, einančio per taškus $B'$, $C'$ ir $D'$. Kadangi ir šis kampas, ir kampas $C'B'D'$ yra lygus pusei lanko $C'D'$, tai kampas tarp apskritimų $\omega_1$ ir $\omega_2$ lygus kampui tarp apskritimų $\omega_3$ ir $\omega_4$.

**7 pavyzdys.** Yra du apskritimai $\omega_1$ ir $\omega_2$, neturintys bendrų taškų. Tuomet egzistuoja inversija, kuria šie apskritimai atvaizduojami į koncentrinius apskritimus. Įrodysime tai.

Sakykime, kad apskritimų $\omega_1$ ir $\omega_2$ spinduliai yra $r_1$, $r_2$, jų centrai — taškai $O_1$, $O_2$, o atstumas tarp centrų lygus $d$. Tiesėje $O_1O_2$ visuomet egzistuoja taškas $C$, iš kurio abiem apskritimams nubrėžtos liestinės $CT_1$ ir $CT_2$ yra lygios (16 pav.). Iš tikrųjų, jei $O_1C = x$, tai iš lygybės $CT_1 = CT_2$ gauname, kad $x^2 - r_1^2 = (d-x)^2 - r_2^2$, arba $x = \frac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{2d}$. Tuomet $O_2C = d - x = \frac{r_2^2 - r_1^2 + d^2}{2d}$, t. y. taškas $C$ yra atkarpoje $O_1O_2$ ir dalija ją santykiu $\frac{O_1C}{O_2C} = \frac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{r_2^2 - r_1^2 + d^2}$. Iš taško $C$, kaip iš centro, spinduliu $CT_1 = CT_2$ nubrėžiame apskritimą $\omega$, kuris yra statmenas duotiesiems apskritimams (paaiškinkite, kodėl). Vieną iš taškų, kuriuose šis apskritimas kerta tiesę $O_1O_2$, pažymime $O$ ir nagrinėjame inversiją su centru taške $O$. Šia inversija apskritimai $\omega_1$ ir $\omega_2$ atvaizduojami į apskritimus $\omega_1'$ ir $\omega_2'$, o apskritimas $\omega$ — į tiesę $l'$, statmeną apskritimams $\omega_1'$ ir $\omega_2'$. Taigi tiesė $l'$ jungia apskritimų $\omega_1'$ ir $\omega_2'$ centrus ir nesutampa su tiese $O_1O_2$, nes ji neina per tašką $O$. Kita vertus, taškai $O$, $O_1$ ir $O_2$ yra vienoje tiesėje, todėl apskritimų $\omega_1'$ ir $\omega_2'$ centrai yra toje pačioje tiesėje $O_1O_2$. Kadangi tiesės $l'$ ir $O_1O_2$ nesutampa, tai apskritimų $\omega_1'$ ir $\omega_2'$ centrai ir tiesėje $l'$, ir tiesėje $O_1O_2$ gali būti tik tada, kai jie sutampa, t. y. apskritimai $\omega_1'$ ir $\omega_2'$ yra koncentriniai. Taigi bet kuria inversija apskritimai $\omega_1$ ir $\omega_2$, kurių centras yra taške $O$, atvaizduojami į koncentrinius apskritimus.




16 pav.

**5 užduotis.** *Išnagrinėkite, kaip pasikeičia samprotavimai, kai vienas iš apskritimų yra kito viduje.*

Pateikiame dar keletą uždavinių, kurių sprendimą palengvina tinkamai panaudotos inversijos.

## Uždaviniai

1. Yra tiesė $a$ ir du plokštumos taškai toje pačioje tiesės pusėje. Kiek egzistuoja apskritimų, einančių per tuos taškus ir liečiančių tiesę $a$?
2. Yra apskritimas ir du taškai, abu išsidėstę arba jo išorėje, arba viduje. Kiek egzistuoja apskritimų, einančių per tuos taškus ir liečiančių apskritimą?
3. Per tašką $A$, esantį apskritimo išorėje, nubrėžta tiesė $l$, neinanti per apskritimo centrą $O$ ir kertanti apskritimą taškuose $M$ ir $N$. Taškai $M'$ ir $N'$ yra simetriški taškams $M$ ir $N$ tiesės $OA$ atžvilgiu, o tiesės $MN'$ ir $M'N$ kertasi taške $A'$. Įrodykite, kad taškas $A'$ nepriklauso nuo tiesės $l$ parinkimo.

   *Nurodymas.* Įsitikinkite, kad taškas $A'$ yra inversiškas taškui $A$ duotojo apskritimo atžvilgiu.

4. Į skritulio nuopjovą įbrėžta $n$ apskritimų; antrasis liečia pirmąjį ir trečiąjį, trečiasis — antrąjį ir ketvirtąjį ir t. t. Įrodykite, kad įbrėžtųjų apskritimų lietimosi taškai yra viename apskritime.

5. Per taškus $A$ ir $B$ eina apskritimai $\omega_1$ ir $\omega_2$, liečiantys apskritimą $\omega$, ir apskritimas $\omega_3$, statmenas apskritimui $\omega$. Įrodykite, kad apskritimas $\omega_3$ sudaro lygius kampus su apskritimais $\omega_1$ ir $\omega_2$.

   *Nurodymas.* Išnagrinėkite inversiją, kurios centras yra taške $A$.

6. Du apskritimai kertasi taškuose $A$ ir $B$. Apskritimą $\omega_1$ jie išoriškai liečia taškuose $A_1$ ir $B_1$, o apskritimą $\omega_2$ — taškuose $A_2$ ir $B_2$. Įrodykite, kad apie trikampius $AA_1B_1$ ir $AA_2B_2$ apibrėžti apskritimai liečiasi.

   *Nurodymas.* Išnagrinėkite inversiją su centru $A$ ir pasinaudokite apskritimų vaizdų homotetiškumu.

7. Apskritimas $\omega_1$ yra apskritimo $\omega_2$ viduje. Nubrėžti dar keturi apskritimai, kurių kiekvienas liečia apskritimus $\omega_1$ ir $\omega_2$, taip pat dar du iš likusių trijų. Įrodykite, kad gauti keturi lietimosi taškai yra viename apskritime.

   *Nurodymas.* Pasinaudoję 7 pavyzdžiu, atvaizduokite apskritimus $\omega_1$ ir $\omega_2$ į koncentrinius apskritimus.