$\alpha + \omega$, 2003, Nr. 2, 12–15

Invariantų metodas

Leonas Narkevičius
leonasn@gim.ktu.lt

Pačioje 2003-ųjų metų pabaigoje leidykla TEV išvertė į lietuvių kalbą ir išleido žymaus latvių matematiko, profesoriaus Agnio Andžanso vadovaujamo autorių kolektyvo knygelę „Invariantų metodas". Invariantai — labai įdomi matematikos sritis, lavinanti loginį mąstymą.

Šios knygelės vertėjo straipsnelyje pateikiama keletas tokio pobūdžio uždavinių.

Uždavinius apie tam tikros padėties raidą žingsnis po žingsnio kartais pavyksta išspręsti invariantų metodu. Šio metodo esmė — surasti ir pasinaudoti tam tikra nekintančia padėties savybe.

Šiek tiek susipažinkime su invarianto sąvoka bei uždaviniais, sprendžiamais invariantų metodu. Jeigu kam patiks duotieji pavyzdžiai, knygelėje galės rasti daug panašių uždavinių. Beje, knygelėje yra ir šių uždavinių sprendimai.

Invariantu, arba invariantiniu dydžiu, vadiname tokį dydį, kuris nagrinėjamame procese nekinta.

Invariantų metodo esmė. Yra daug uždavinių, kuriuose reikia nustatyti, ar atliekant tam tikras operacijas galima gauti nurodytą rezultatą. Jei teisingas atsakymas „Ne", tai tokią išvadą dažnai pavyksta pagrįsti invariantų metodu.

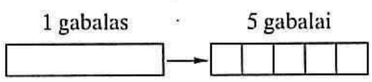
Panagrinėkime keletą invariantų metodo taikymo pavyzdžių.

Papraščiausi yra aritmetiniai invariantai, susiję su *lyginumu.*

1 pavyzdys. *Yra* 10 *audinio gabalų. Kai kuriuos iš jų sukarpius į* 5 *arba* 7 *dalis, visi gautieji gabalai sumaišomi ir kai kurie iš jų vėl sukarpomi į* 5 *arba* 7 *dalis ir t. t. Ar po kurio nors skaičiaus tokių karpymų galima gauti* 1997 *gabalus?*

Sprendimas. Šiek tiek pasvarstę, tikriausiai nuspręsime: neįmanoma. Dabar patyrinėkime sprendimo eigą, suskirstę ją žingsniais.

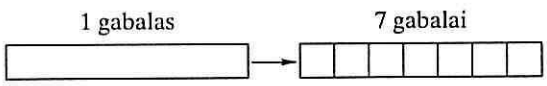
1 žingsnis. Imkime vieną audinio gabalą ir sukarpykime į 5 dalis:



1 pav.

Taigi gabalų skaičius po vieno sukarpymo padidėja 4 vienetais, nes $5 - 1 = 4$.

Imkime kitą audinio gabalą ir sukarpykime į 7 dalis:



2 pav.

Gabalų skaičius po šio sukarpymo padidėja 6 vienetais: $7 - 1 = 6$.

2 žingsnis. Toliau tyrinėkime sprendimo eigą. Iš pradžių yra 10 gabalų. Vieną gabalą sukarpius į 5 dalis, gabalų skaičius padidėja 4 vienetais, t. y. gaunama $10 + 4 = 14$ gabalų.

Kitą gabalą sukarpius į 7 dalis, gabalų skaičius padidėja 6 vienetais ir gaunama $10 + 6 = 16$ gabalų.

Išvados:

a) jei pradinis gabalų skaičius buvo 10 (lyginis skaičius), tai sukarpius vieną gabalą gaunama 14 arba 16 (lyginį skaičių) gabalų;

b) atliekant nurodytas operacijas, audinio gabalų skaičiaus lyginumas nesikeičia (buvo lyginis skaičius ir lieka lyginis), todėl niekada negausime nelyginio skaičiaus audinio gabalų.

Invariantinė savybė — gabalų skaičius yra lyginis.

Dažnai invariantine savybe renkamės ne teiginį „yra lyginis skaičius" arba „yra nelyginis skaičius", bet teiginį „dalijasi iš 3" arba „nesidalija iš 3".

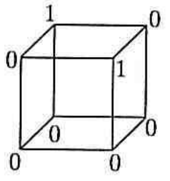
2 pavyzdys. *Miške auga 36 grybai. Pirmos dienos ryte vienas grybas nuvirto, bet išaugo 4 nauji. Taip atsitinka kiekvieną kitą dieną — vienas nuvirsta, 4 išauga. Kurią dieną šiame miške bus 15 037 grybai?*

Sprendimas. Nustatykime, koks yra vienos dienos grybų skaičiaus miške pokytis. Jei miške išauga 4 nauji grybai ir 1 nugriūva, tai grybų skaičius miške padidėja trimis, nes $4 - 1 = 3$. Taip vyksta kiekvieną dieną. Pradinis grybų skaičius dalijasi iš 3, taigi jis dalijasi iš 3 visą laiką. Norėdami nustatyti, ar kada nors miške bus 15 037 grybai, tikriname, ar skaičius 15 037 dalijasi iš 3. Bet šis skaičius nesidalija iš 3 be liekanos, todėl nebus tokios dienos, kad miške būtų 15 037 grybai.

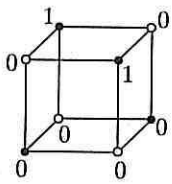
Invariantinė savybė — grybų skaičius dalijasi iš 3.

Invariantų būna ir algebrinių, o invariantinis dydis gali būti suma, skirtumas ar elementų skaičius.

3 pavyzdys. *Šešiose kubo viršūnėse įrašyti nuliai, o dviejose — vienetai (3 pav.). Vienu ėjimu leidžiama pasirinkti bet kurią kubo briauną ir prie jos abiejuose galuose parašytų skaičių pridėti po 1. Ar egzistuoja tokia seka ėjimų, po kurių visose kubo viršūnėse būtų įrašyti vienodi skaičiai?*



3 pav.



4 pav.

Sprendimas Pirmiausia nuspalvinkime 4 kubo viršūnes, kaip parodyta 4 paveiksle. Nuspalvintose viršūnėse įrašytų skaičių suma lygi 2, o nenuspalvintose — lygi 0. Šių sumų skirtumas lygus 2. Kiekviena briauna turi vieną nuspalvintą ir vieną nenuspalvintą viršūnę. Pasirinkus briauną ir abiejuose jos galuose pridėjus po 1, vienu metu ir juodose, ir baltose viršūnėse įrašytų skaičių suma padidinama vienetu, todėl šių viršūnių skaičių sumų skirtumas nesikeičia. Taigi jis visą laiką yra lygus 2. Tam, kad visose viršūnėse įrašyti skaičiai taptų vienodi, šis skirtumas turėtų būti lygus 0, bet tai yra negalima.

Invariantinė savybė — nuspalvintose ir nenuspalvintose viršūnėse įrašytų skaičių sumų skirtumas yra pastovus dydis, t. y. lygus 2.

Viena iš algebrinių invariantų rūšių yra periodiškumas.

4 pavyzdys. *Begalinė skaičių seka* 1, 2, 3, 5, 8, 3, 1, 4, 5, 9, 4, 3, 7, 0, 7, 7, ... *sudaryta taip: pirmieji du skaičiai yra* 1 *ir* 2, *o kiekvienas kitas skaičius, pradedant trečiuoju, yra dviejų prieš jį einančių skaičių sumos paskutinis skaitmuo. Ar šioje skaičių sekoje yra greta stovintys skaičiai* 2 *ir* 4?

Sprendimas. Lyginius skaičius pažymėkime p, o nelyginius — n.

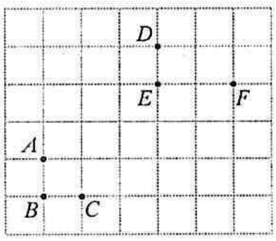
Tada skaičių seka atrodo taip: n, p, n; n, p, n; n, p, n; n, p, n; ....

Šioje sekoje periodiškai kartojasi grupė (n, p, n). Sekoje niekur nėra greta dviejų lyginių skaičių, taigi šioje sekoje niekur greta nebus skaičiai 2 ir 4.

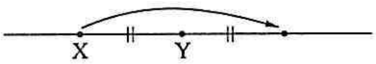
Invariantinė savybė — sekoje periodiškai kartojasi grupė (n, p, n).

Būna ir geometrinių invariantų — pavyzdžiui, invariantinis dydis gali būti plotas.

5 pavyzdys. *Plokštuma padalyta į vienodus kvadratėlius kaip languotas popieriaus lapas. Pažymėtos* 6 *kvadratėlių viršūnės:* A, B, C, D, E, F *(5 pav.).*



5 pav.

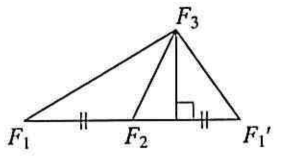


6 pav.

Viršūnėse A, B, C *stovi figūros. Vienu ėjimu leidžiama pasirinkti dvi bet kurias figūras* X *ir* Y *ir perkelti figūrą* X *per* Y *taip, kad figūros* X *buvusi bei naujoji viršūnės būtų vienoje tiesėje, be to, atstumas tarp figūrų* X *ir* Y *taškų liktų nepakitęs (6 pav.). Ar po keleto tokių ėjimų gali susidaryti situacija, kad figūra iš taško* A *persikels į tašką* D, *iš* B — *į* E, *o iš* C — *į* F?

Sprendimas. Taškus, kuriuose stovi figūros, pažymėkime F_1, F_2, F_3. Atliekant ėjimus trikampio $F_1F_2F_3$ plotas nesikeičia.

Iš tikrųjų, $\triangle F_1F_2F_3$ ir $\triangle F_1'F_2F_3$ pagrindai F_1F_2 ir $F_1'F_2$ lygūs ir bendra aukštinė, taigi jų plotai lygūs (7 pav.).



7 pav.

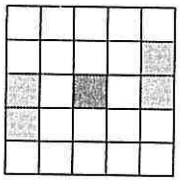
O štai $\triangle ABC$ ir $\triangle DEF$ plotai nelygūs, todėl sąlygoje minimos situacijos negausime.

Invariantinė savybė — figūrų sudaromo trikampio plotas nesikeičia.

Visi žmonės mėgsta įvairius žaidimus. Pasirodo, kad ir žaidimuose padeda invariantai. Tiesa, tai gal šiek tiek netradiciniai žaidimai.

6 pavyzdys. *Du lokiukai — Lepeškiukas ir Kudliukas dėlioja medaus statinaites kvadrate, kuris sudarytas iš 5×5 langelių. Vienu ėjimu leidžiama padėti 1 medaus statinaitę viename langelyje arba 2 medaus statinaites po vieną dviejuose gretimuose langeliuose, jei jie yra laisvi. Tas lokiukas, kuris negali atlikti ėjimo, pralaimi, o lokiukas, kuris laimi, pasiima visas medaus statinaites. Kuris lokiukas, teisingai žaisdamas, visada gali laimėti (žaidimą pradeda Lepeškiukas)?*

Sprendimas. Pirmu ėjimu Lepeškiukui reikia padėti vieną medaus statinaitę į kvadrato centrą (8 pav.).



8 pav.

Antru ėjimu antrasis žaidėjas — Kudliukas savo medaus statinaitę (arba dvi) gali pastatyti bet kurioje vietoje. Trečiu ėjimu Lepeškiukas pastatys medaus statinaitę (atitinkamai dvi statinaites) simetriškai kvadrato centro atžvilgiu Kudliuko pastatytai statinaitei (statinaitėms). Ir toliau Lepeškiukas žaidžia panašiai.

Jei Kudliukas gali atlikti eilinį ėjimą, tai yra galimas simetriškas ėjimas, kurį atliks Lepeškiukas. Taigi žaidimą laimės Lepeškiukas, t. y. pirmasis žaidėjas.

Keletą invariantų metodo taikymo uždavinių pabandykite išspręsti savarankiškai.

1. Lentoje užrašyti skaičiai 1, 2, 3, ..., 10. Vienu ėjimu leidžiama išsirinkti bet kuriuos du iš jų ir prie abiejų pridėti po vienetą. Ar po kelių ėjimų galima pasiekti, kad visi skaičiai taptų vienodi?

2. Yra miesto žemėlapis su 1996 lemputėmis. Kiekviena lemputė turi atskirą jungiklį. Vienu metu galima keisti bet kurių 26 lempučių jungiklio padėtį. Iš pradžių yra uždegta 17 lempučių. Ar galima užgesinti visas lemputes?

3. Natūralųjį skaičių kas minutę galima arba dauginti, arba dalyti iš 2 ar iš 3. Ar po 60 minučių skaičius 24 gali būti pavirtęs skaičiumi 108?

4. Kvadratinė lentelė sudaryta iš 4×4 langelių, ir į kiekvieną langelį įrašytas ženklas „ + “ arba „ − “ (9 pav.). Vienu ėjimu leidžiama keisti ženklus visuose langeliuose, esančiuose vienoje eilutėje, viename stulpelyje arba vienoje įstrižainėje (įstrižainė apibrėžiama taip pat kaip 7 pavyzdyje). Įrodykite, kad, nors ir kiek tokių keitimų atliktume, nepavyks gauti lentelės, kurioje būtų tiktai ženklai „ + “.

+	+	+	+
+	+	+	+
−	+	+	+
+	+	+	+

9 pav.

5. Jonas turi 15 etikečių. Pirmą savaitę jis mokykloje kiekvieną dieną iškeičia 1 etiketę į 4 etiketes. Taip jis daro kiekvieną savaitę. Savaitėje yra 5 mokymosi dienos. Kurios dienos vakare Jonas turės lygiai 113 etikečių?

6. Su natūraliuoju skaičiumi galima atlikti šias operacijas: pridėti prie skaičiaus jo skaitmenų sumą arba ją iš jo atimti. Ar atliekant tik šias operacijas iš skaičiaus 41 galima gauti skaičių 91?