$\alpha + \omega$, 2003, Nr. 1, 87–92

Funkcijų vaizdavimas „Dinaminėje geometrijoje"

Laura Stepanauskienė
Laura.Stepanauskiene@banga.lt

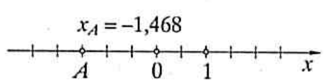
Straipsnyje aptariama, kaip „Dinaminės geometrijos" aplinkoje pačiam susikurti projektus, naudingus įvairioms funkcijoms nagrinėti. Jau sukurtų projektų, jų aprašymų ar pagalbos juos kuriant galima rasti „Dinaminės geometrijos" svetainėje: http://www.ipc.lt/emokykla/vartai/dinamine_geometrija.

Kompiuterinė mokomoji programa „Dinaminė geometrija" gali būti plačiai taikoma ne tik geometrijos pamokose. Šiame darbe aprašyta funkcijų grafikų braižymo technika, nors po pirmos pažinties su programa net nepagalvotume, kad šioje aplinkoje galima braižyti grafikus. „Dinaminėje geometrijoje" funkcijų vaizdavimas kur kas sudėtingesnis, atimantis daugiau laiko, bet yra įdomesnis nei kitose specialiose grafikų braižymo programose. Norint nubraižyti funkcijos grafiką „Dinaminės geometrijos" aplinkoje, reikia žinoti funkcijos apibrėžimą.

- Pirmiausia nurodoma funkcijos apibrėžimo sritis.
- Toje srityje pasirenkamas laisvai judantis taškas A — vienas apibrėžimo srities taškas. Apskaičiuojama to taško x koordinatė. Taip gaunamas vienas iš dviejų tarp savęs susijusių kintamųjų dydžių, kuriam laisvai parenkamos skaitinės reikšmės iš funkcijos apibrėžimo srities. Jis vadinamas nepriklausomu kintamuoju dydžiu, arba argumentu.
- Tuomet pagal nurodytą funkcinę priklausomybę $y = f(x)$ apskaičiuojama priklausomo kintamojo y reikšmė. Taip gaunamas antrasis kintamas dydis, kurio skaitinė reikšmė kinta priklausomai nuo pirmojo kintamojo dydžio skaitinių reikšmių. Jis vadinamas priklausomu kintamuoju dydžiu, arba to pirmojo kintamojo dydžio funkcija.
- Gauta tarp savęs susijusių kintamųjų dydžių x ir y skaitinių reikšmių pora vaizduojama koordinačių plokštumos tašku. Taip gaunamas funkcijos grafikui priklausantis taškas. Dabar jau galima stebėti šių kintamųjų dydžių priklausomybę. Taškui A slenkant abscisių ašimi, t. y. keičiant x reikšmę, matyti, kaip kinta nuo jos priklausanti y reikšmė: plokštumoje brėžiamas nurodytos funkcijos $y = f(x)$ grafikas.
- Norint grafiką matyti, reikia palikti taško, kurio koordinatės yra $(x; y)$, pėdsaką, kai taškas A juda abscisių ašimi. Tam sukonstruojamas pagal nurodytą funkcinį sąryšį gauto taško $(x; y)$ hodografas, kai taškas $A(x; 0)$ perbėga visas apibrėžimo srities reikšmes.

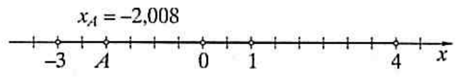
Funkcijos apibrėžimo srities vaizdavimas „Dinaminėje geometrijoje"

Dažnai funkcijos apibrėžimo sritis (funkcijos argumento įgyjamos reikšmės) yra visa realiųjų skaičių aibė. „Dinaminėje geometrijoje" tokia apibrėžimo sritis vaizduojama labai paprastai — abscisių ašyje pasirenkamas laisvai judantis taškas A (1 pav.), kurį stumdant abscisių ašyje, jo koordinatė x_A kinta nuo $-\infty$ iki $+\infty$.



1 pav.

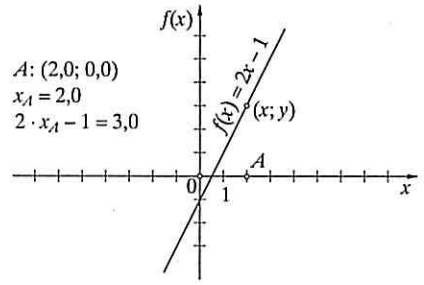
Jei apibrėžimo sritis yra intervalas, tai pirmiausia abscisių ašyje sukonstruojama atkarpa ir joje pasirenkamas laisvai judantis taškas A. Parodytame 2 paveiksle taškas A yra apribotas intervalu nuo -3 iki $+4$.



2 pav.

Funkcijos grafiko braižymo pavyzdys

Naudodamiesi „Dinamine geometrija" nubraižykime kokios nors funkcijos, pavyzdžiui, $f(x) = 2x - 1$ (apibrėžimo sritis — visa realiųjų skaičių aibė), grafiką (3 pav.)



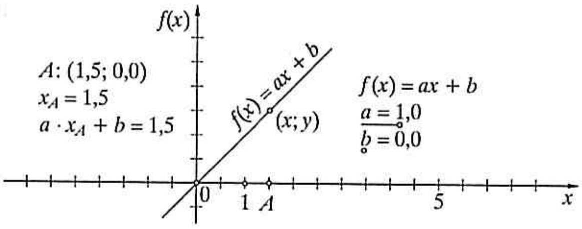
3 pav.

Grafikas braižomas atliekant nurodytus žingsnius.

Pastaba. Riestiniuose skliaustuose {...} parašyta, kaip dirbant su „Dinamine geometrija" atliekamas nurodytas veiksmas. Kursyvu nurodomos konkrečios meniu komandos, kurias reikia pasirinkti.

1. Brėžinių lape sukuriama koordinačių sistema.
   {*Grafikas/Brėžti ašis*}
2. Abscisių ašyje pasirenkamas laisvai judantis taškas A (netinka taškas, vaizduojantis vienetinį ilgį).
   {Pažymima Ox ašis ir pasirenkama komanda *Konstravimas/Taškas ant objekto*}
3. Užrašomos taško A koordinatės.
   {Pažymimas taškas A ir pasirenkama komanda *Matavimas/Koordinatės*}
4. Užrašoma taško A koordinatė (apibrėžimo srities reikšmė).
   {*Matavimo* meniu atidaromas *Skaičiuoklis*. Tuomet brėžinių lape spragtelimas taško A koordinačių užrašas. Atsiradusiame langelyje spragtelimas x ir skaičiuoklyje spragtelimas mygtukas *Gerai*}
5. Užrašoma norimos pavaizduoti funkcijos formulė $y = 2 \cdot x_A - 1$.
   {*Matavimo* meniu atidaromas *Skaičiuoklis*, kurio klaviatūra surenkama $2\cdot$. Tada brėžinių lape spragtelimas matavimas x_A, vėl skaičiuoklyje surenkama -1 ir spragtelimas mygtukas *Gerai*}
6. Koordinačių plokštumoje atidedamas funkcijos grafikui priklausantis taškas $B(b_1;\ b_2)$; čia $b_1 = x_A$ ir $b_2 = 2 \cdot x_A - 1$.
   {Brėžinių lape pažymimi du matavimai x_A ir $2 \cdot x_A - 1$ bei pasirenkama komanda *Grafikas/Atidėti kaip* $(x;\ y)$}
   Taip taškas B siejamas su tašku A norimu funkciniu (mūsų atveju — tiesiniu) sąryšiu. Todėl judinant tašką A abscisių ašyje, taškas B juda tiese $y = 2 \cdot x - 1$, kuri dar nėra matoma.
7. Norint pamatyti taško B judėjimo kelią (norimą tiesę), kai taškas A juda abscisių ašimi (perbėga apibrėžimo srities reikšmes), reikia sukonstruoti taško B hodografą.
   {Pažymimi taškai A ir B bei pasirenkama komanda *Konstravimas/Hodografas*}

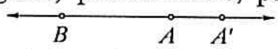
Norint nubrėžti bendro pavidalo tiesinės funkcijos, pavyzdžiui, $f(x) = ax + b$, grafiką (4 pav.), pirmiausia reikia susikurti koeficientų a ir b didumą vaizduojančias slinkties juostas. Tada stumdant juostas galima stebėti, kaip tie koeficientai keičia tiesės $f(x) = ax + b$ padėtį koordinačių sistemoje.



4 pav.

Toliau pateikiami žingsniai, kaip sukonstruoti koeficiento a slinkties juostą. Kitų koeficientų, pavyzdžiui, aukštesnio laipsnio funkcijų, slinkties juostos konstruojamos analogiškai. Kad kaskart nereikėtų atlikinėti tų pačių žingsnių, patariama susikurti slinkties juostą konstruojantį scenarijų.

Funkcijos $f(x) = ax + b$ koeficiento a slinkties juostos konstravimas

- Sukonstruojamas koeficiento a slinkties juostos vienetinis ilgis AA' — A' gaunamas, kai taškas A (slinkties juostos vienas galas) pastumiamas, pavyzdžiui, 1 cm atstumu (vienetinį ilgį galima pasirinkti kokį norima). 

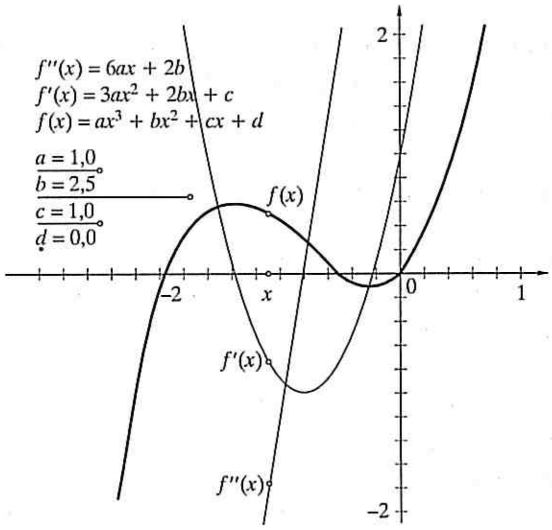
  {Pažymimas taškas A ir pasirenkama komanda *Transformacijos/Postūmis*}
- Vaizdas A' ir pirmavaizdis A sujungiami tiese.
  {Liniuotės mygtukas laikomas nuspaustas, kol pasirenkamas tiesės mygtukas. Pažymimi taškai A' ir A bei pasirenkama komanda *Konstravimas/Tiesė*}
- Tiesėje AA' (5 pav.) padedamas laisvai judantis taškas B — slinkties juostos antrasis (tampomas) galas.
  {Pažymima tiesė ir pasirenkama komanda *Konstravimas/Taškas ant objekto*}

5 pav.

- Apskaičiuojamas slinkties juosta vaizduojamas koeficiento didumas, t. y. apskaičiuojamas santykis $a = \frac{AB}{AA'}$.
  {Iš eilės pažymimi taškai A, A', B ir laikant nuspaustą <Shift> klavišą pasirenkama komanda *Matavimas/Santykis*}
  Komentaras. Jei programoje santykis skaičiuojamas pažymėjus dvi atkarpas, tai jis visuomet bus teigiamas, nes tai dviejų ilgių santykis. Norint gauti neigiamą santykį (kai taškas B nustumiamas į kairę nuo taško A), tai prieš pasirenkant komandą reikia tam tikra tvarka pažymėti tris taškus. Visi trys taškai yra vienoje tiesėje, todėl lengviausia įsivaizduoti, kad slinkties juostos parametras $\frac{AB}{AA'}$ atitinka koeficientą, kuriuo taškas A' ištempiamas centro A atžvilgiu į tašką B. Todėl nagrinėjamas santykis $\frac{AB}{AA'}$ yra teigiamas, kai taškas B yra centro A dešinėje, ir yra neigiamas, kai taškas B yra centro A kairėje. Mat taškas A' pagal atliktą konstrukciją visuomet yra centro A dešinėje (ištempis yra teigiamas, kai vaizdas ir pirmavaizdis transformacijos centro atžvilgiu yra vienoje pusėje, ir neigiamas, kai vaizdas ir pirmavaizdis yra skirtingose pusėse).
- Paslepiamas taškas A' ir tiesė.
  {Pažymimas taškas A' ir tiesė bei pasirenkama komanda *Vaizdas/Slėpti*}

- Taškai A ir B sujungiami į atkarpą (tuomet galima paslėpti tašką A).
  {Liniuotės mygtukas laikomas nuspaustas, kol pasirenkamas atkarpos mygtukas. Pažymimi taškai A ir B bei pasirenkama komanda *Konstravimas/Atkarpa*}
- Pakeičiamas santykio užrašas.
  {Pasirenkamas teksto mygtukas ir santykio užrašas spragtelimas du kartus. Atsivėrusiame dialogo lange „Matavimo formatas" spragtelimas mygtukas *Tekstinis formatas*. Atsiradusioje eilutėje užrašas „santykis $\frac{AB}{AA'} =$ " pakeičiamas į „$a =$ "}

Funkcijos $F(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ir jos pirmosios bei antrosios išvestinių grafikų braižymas



6 pav.

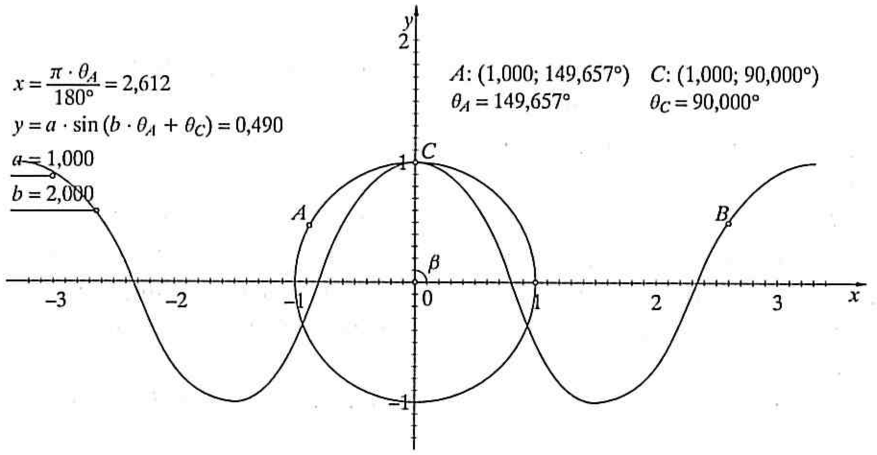
Funkcijos grafikas braižomas taip:

- 1–4 žingsniai tie patys, kaip ir brėžiant funkcijos $f(x) = 2 \cdot x - 1$ grafiką.
- Prieš atliekant 5-ąjį žingsnį, sukuriamos keturios koeficientų a, b, c ir d slinkties juostos.
- Užrašoma norimos pavaizduoti funkcijos priklausomo kintamojo $y = ax_A^3 + bx_A^2 + cx_A + d$ reikšmė.
  {Per *Matavimo* meniu atidaromas *Skaičiuoklis*. Tuomet iš eilės spragtelima: brėžinių lape matavimas a, skaičiuoklio klaviatūroje daugybos ženklas $\times$, brėžinių lape matavimas x_A, skaičiuoklio klaviatūroje laipsnio ženklas $\wedge$, skaičius 3 ir sumos ženklas $+$, brėžinių lape matavimas b, skaičiuoklio klaviatūroje daugybos ženklas $\times$, brėžinių lape matavimas x_A, skaičiuoklio klaviatūroje laipsnio ženklas $\wedge$, skaičius 2 ir sumos ženklas $+$, brėžinių lape matavimas c, skaičiuoklio klaviatūroje daugybos ženklas $\times$, brėžinių lape matavimas x_A, skaičiuoklio klaviatūroje sumos ženklas $+$, brėžinių lape matavimas d, skaičiuoklio klaviatūroje mygtukas *Gerai*}
- 6–7 žingsniai tie patys, kaip ir brėžiant funkcijos $f(x) = 2x - 1$ grafiką.

Funkcijos $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ pirmosios išvestinės $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ ir antrosios išvestinės $f''(x) = 6ax + 2b$ grafikai braižomi taip pat, kaip ir funkcijos $f(x)$, tik gaunama kitokia priklausomo kintamojo y reikšmė.

Trigonometrinės funkcijos $y = a\sin(bx + \beta)$ grafikas

„Dinaminėje geometrijoje“ trigonometrinių funkcijų grafikų braižymas nuo aptartųjų skiriasi tuo, kad yra supaprastintas, nes abu x ir y išreiškiami kaip kito kintamojo (vadinamo parametru) funkcijos. Šiame pavyzdyje naudojamas parametras yra kampas $\theta \in [-\pi; \pi]$. Funkcijos $y = a\sin(bx + \beta)$ grafikas 7 paveiksle braižomas pasirinkus $a = 1$, $b = 2$ ir $\beta = 90°$.



7 pav.

Funkcijos grafikas gaunamas atlikus šiuos žingsnius:

- Sukonstruojamos koeficientų a ir b slinkties juostos.
- Brėžinių lape sukuriama koordinačių sistema.
{*Grafikas/Brėžti ašis*}
- Sukonstruojamas vienetinis apskritimas, kurio centras yra koordinačių sistemos pradžia ir vienas jo taškas — koordinačių sistemos vienetas.
{Pažymimi minėti du taškai ir pasirenkama komanda *Konstravimas/Apskritimas turint centrą ir tašką*}
- Ant vienetinio apskritimo padedami du laisvai judantys taškai A ir C.
{Pažymimas apskritimas ir pasirenkama komanda *Konstravimas/Taškas ant objekto*}
- Kadangi parametras $\theta \in [-\pi; \pi]$ yra kampo didumas, pasirenkamos polinės koordinatės.
{*Grafikas/Koordinatės/Polinės(r; teta)*}
- Užrašomos apskritimo taškų A ir C koordinatės.
{Pažymimi taškai A ir C bei pasirenkama komanda *Matavimas/Koordinatės*}
- Užrašoma taško A koordinatė θ_A ir taško C koordinatė $\theta_C \in [-\pi; \pi]$ (funkcijos $y = a\sin(bx + \beta)$ išraiškoje atitinka reikšmę β).
{Per *Matavimo* meniu atidaromas *Skaičiuoklis.* Tuomet brėžinių lape spragtelimas taško C koordinačių užrašas. Atsiradusiame langelyje spragtelimas θ ir skaičiuoklyje spragtelimas mygtukas *Gerai.* Taip pat užrašoma ir θ_C}
- Užrašoma funkcija $x = \frac{\pi \cdot \theta_A}{180°}$.
{Per *Matavimo* meniu atidaromas *Skaičiuoklis*, kurio *dydžių* laukelyje pasirenkama π ir klaviatūroje spragtelimas daugybos ženklas $\times$. Tada brėžinių lape spragtelimas matavimas θ_A, skaičiuoklio klaviatūroje spragtelimas dalybos ženklas /, surenkamas skaičius 180 (*vienetų* laukelyje pasirenkami laipsniai) ir spragtelimas mygtukas *Gerai*}
- Užrašoma funkcija $y = a \cdot \sin(b \cdot \theta_A + \theta_C)$.
{Per *Matavimo* meniu atidaromas *Skaičiuoklis.* Tuomet iš eilės spragtelima: brėžinių lape matavimas a, skaičiuoklio klaviatūroje daugybos ženklas $\times$, *funkcijų* laukelyje pasirenkama

sin [, brėžinių lape matavimas b, skaičiuoklio klaviatūroje daugybos ženklas $\times$, brėžinių lape matavimas θ_A, skaičiuoklio klaviatūroje sumos ženklas $+$, brėžinių lape matavimas θ_C, skaičiuoklio klaviatūroje funkcijos pabaigos skliaustelis] ir galiausiai spragtelimas mygtukas *Gerai*}

- Gauta pora $(x; y)$ yra sinusoidės taškas stačiakampėje koordinačių sistemoje, todėl pasirenkamos stačiakampės koordinatės.
  {*Grafikas/koordinatės/stačiakampės*}
- Koordinačių plokštumoje atidedamas funkcijos grafikui priklausantis taškas $B(b_1; b_2)$; čia $b_1 = x = \frac{\pi \cdot \theta_A}{180^\circ}$ ir $b_2 = y = a \cdot \sin(b \cdot \theta_A + \theta_C)$.
  {Brėžinių lape pažymimi du matavimai $x = \frac{\pi \cdot \theta_A}{180^\circ}$ ir $y = a \cdot \sin(b \cdot \theta_A + \theta_C)$ bei pasirenkama komanda *Grafikas/Atidėti kaip* $(x; y)$}
  Taip taškas B susiejamas su tašku A norimu trigonometriniu sąryšiu. Todėl stumiant tašką A vienetiniu apskritimu, taškas B juda sinusoide $y = a \cdot \sin(b \cdot \theta_A + \theta_C)$, kuri dar nėra matoma.
- Norint pamatyti taško B judėjimo kelią (sinusoidę), kai taškas A juda vienetiniu apskritimu (t. y. kinta parametro θ reikšmės), reikia sukonstruoti taško B hodografą, kai jo judėjimą sąlygoja taškas A.
  {Pažymimi taškai A ir B bei pasirenkama komanda *Konstravimas/Hodografas*}

Jei norima, kad parametras $\theta \in [-\pi; \pi]$ kistų nuo 0 iki 2π, reikia skaičiuokliu prie θ reikšmės pridėti π ir kaip parametrą naudoti gautą sumą.

Panašiu būdu — įvedus parametrą galima braižyti ir antrosios eilės kreives: apskritimus, elipses, hiperboles. Toks pavyzdys galbūt būtų naudingas norint geriau suvokti funkcijos apibrėžimą, pabrėžiant, kad funkcija yra taisyklė, pagal kurią kiekvienam tam tikros apibrėžimo srities elementui vienareikšmiškai priskiriamas tiktai vienas reikšmių srities elementas.

INFO

Laura Stepanauskienė ir Eglė Jasutienė pagal leidyklos TEV išleistą vadovėlį „Matematika 9, I ir II dalys" rengia kompaktinį diską „Matematika 9 su dinamine geometrija". Manome, kad tai bus puiki pagalbinė priemonė mokantis ir mokant matematikos IX klasėje. Darbą planuojama baigti šiais metais. Jei šis kompaktinis diskas bus palankiai įvertintas, kitais metais tokia pat mokomoji priemonė bus rengiama X klasei.