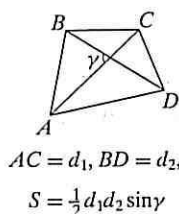


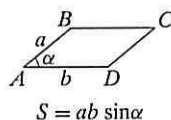
Keturkampio ploto formulė

Henrikas Kavaliauskas

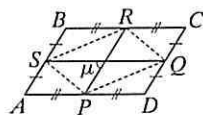
Straipsnyje lygiagretainio ploto formulė apibendrinama bet kokiam iškilajam keturkampiiui.



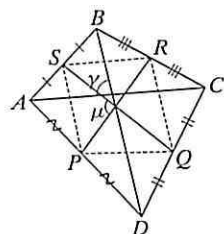
1 pav.



2 pav.



3 pav.



$AS = BS, BR = RC,$
 $CQ = QD, AP = PD,$
 $SP = m_1, PR = m_2$

4 pav.

Žinome ne vieną lygiagretainio ploto formulę. Pavyzdžiui, $S = ab \sin \alpha$; čia a, b yra lygiagretainio kraštinės, o α – kampas tarp jų (1 pav.). Lygiagretainio plotą galime išreikšti ir įstrižainėmis: $S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \gamma$; čia d_1, d_2 yra įstrižainės, o γ – kampas tarp jų (1 pav.). Įdomu, kad ši formulė tinka bet kokiam iškilajam keturkampiiui. Įsitikinkite!

Ar ploto formulė $S = ab \sin \alpha$ (2 pav.) tinka bet kokiam keturkampiiui? Žinoma ne! Tačiau neskubėkime. Pabandykime interpretuoti šią formulę šiek tiek kitaip.

Tegu S ir Q, R ir P yra lygiagretainio priešingų kraštinių vidurio taškai, $SQ = m_1, PR = m_2, \mu$ – kampas tarp atkarpų SQ ir PR (3 pav.). Kadangi $a = m_2, b = m_1, \alpha = \mu$, tai lygiagretainio ploto formulę $S = ab \sin \alpha$ galime užrašyti taip: $S = m_1m_2 \sin \mu$; čia m_1, m_2 lygiagretainio priešingų kraštinių vidurio taškus jungiančių atkarpų ilgiai. Pasirodo, tokia formulė teisinga bet kokiam keturkampiiui!

Įrodysime, kad keturkampio $ABCD$ plotas $S = m_1m_2 \sin \mu$; čia m_1, m_2 yra priešingų keturkampio kraštinių vidurio taškus jungiančių atkarpų ilgiai, o μ – kampas tarp šių atkarpų (4 pav.).

Nagrinėkime keturkampį $SRQP$. Nesunku įsitikinti, kad jis yra lygiagretainis. Taigi

$$S_{SRQP} = \frac{1}{2}SQ \cdot RP \cdot \sin \mu = \frac{1}{2}m_1m_2 \sin \mu.$$

Todėl pakanka parodyti, kad $S = 2S_{SRQP}$.

Nubrėžkime keturkampio įstrižaines AC ir BD . Pažymėkime jų ilgius $d_1 = AC, d_2 = BD$, o įstrižainių sudaromą kampą – γ . Tada $S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \gamma$.

Lygiagretainio $SRQP$ kraštinės PQ ir RQ yra lygiagrečios su AC ir BD , todėl $\angle PQR = \gamma$. Be to,

$$PQ = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}d_1, \quad RQ = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}d_2.$$

Todėl

$$S_{SRQP} = PQ \cdot RQ \sin \angle PQR = \left(\frac{1}{2}d_1\right)\left(\frac{1}{2}d_2\right) \sin \gamma.$$

$$\text{Taigi } 2S_{SRQP} = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \gamma = S.$$

Keturkampio ploto formulė $S = m_1m_2 \sin \mu$ įrodyta.