$\alpha + \omega$, 2003, Nr. 1, 84–85

Keletas minčių apie vieną matematikos uždavinį

Gediminas Stepanauskas
gediminas.stepanauskas@maf.vu.lt

2002 metų valstybinio matematikos brandos egzamino uždavinyje apie judėjimą vietoje „pastovus greitis" buvo užrašyta „vidutinis greitis". Moksleiviams tai vargu ar sutrukdė: jie uždavinį sprendė laikydami greitį pastoviu. Autorius pateikia uždavinio sprendimą be šios prielaidos.

Artėja moksleivių valstybinis matematikos brandos egzaminas. Todėl norėtųsi pasidalyti mintimis apie vieną įdomų 2002 metų valstybinio matematikos brandos egzamino uždavinį:

> Automašinų kolona, kurios ilgis 10 km, juda plentu pastoviu 60 km per valandą greičiu. Iš paskutinės mašinos siunčiamas pasiuntinys — motociklininkas į kolonos priekį. Jam pavedama per 1 valandą pasivyti priekinę mašiną ir, perdavus laišką, grįžti į kolonos galą. Ar važiuodamas vidutiniu 72 km/h greičiu jis spės atlikti užduotį? Ar jam pakaktų 71 km/h greičio?

Mokykloje dažnai sprendžiamas kad ir toks ar panašus uždavinys.

Iš miesto A į miestą B važiavo du automobiliai. Pirmasis automobilis pusę kelio važiavo 120 km/h, *o antrąją pusę kelio —* 80 km/h *greičiu. Antrasis automobilis pusę laiko važiavo* 120 km/h, *o antrąją pusę laiko —* 80 km/h *greičiu. Raskite pirmojo ir antrojo automobilių visos kelionės vidutinius greičius.*

Šito uždavinio mes čia nespręsime. Gabesni moksleiviai jį nesunkiai įveikia.

Matyt, valstybinio egzamino uždavinio autorius (ar autoriai) turėjo omenyje pastovų motociklininko greitį. Mokiniai, kurie sprendė, galvojo taip pat. Neteko matyti nė vieno darbo, kuriame šis uždavinys būtų išspręstas teisingai. Pabandykime jį išspręsti.

Sprendimas. Tegul v_v yra vidutinis motociklininko greitis, t_p — laikas, per kurį motociklininkas nuvažiuoja į kolonos priekį, t_a — laikas, per kurį motociklininkas grįžta į kolonos galą. Tarkime, kad kelionėje motociklininkas sugaišta lygiai 1 val. ($t_a + t_p = 1$). Tuomet vidutinis motociklininko greitis

$$v_v = \frac{\text{nuvažiuotas kelias pirmyn} + \text{nuvažiuotas kelias atgal}}{\text{sugaištas laikas}} = \\ = \frac{(10 + 60t_p) + (10 - 60t_a)}{1} = 80 - 120t_a.$$

Kolona juda 60 km/h greičiu, todėl motociklininkas, net nevažiuodamas atgal, o tik laukdamas, užtruktų ne ilgiau kaip $\frac{1}{6}$ valandos. Taigi

$$0 < t_a \leqslant \frac{1}{6}.$$

Matyti, kad užduočiai įvykdyti lygiai per valandą gali užtekti bet kokio vidutinio greičio iš intervalo [60; 80). Bet taip pat aišku, jog, pasirinkus bet kokį vidutinį greitį iš intervalo [60; 80), galima taip suplanuoti važiavimą, kad per valandą užduotis įvykdyta nebus.

Pavyzdžiui, sakykime, planuojame važiuoti vidutiniu 72 km/h greičiu. Sugaištas laikas užduočiai įvykdyti yra

$$t_p + t_a = \frac{(10 + 60t_p) + (10 - 60t_a)}{72}.$$

Pertvarkę šią lygtį, gauname $3t_p + 33t_a = 5$.

Pasirinkę $t_p = 1$ val., o $t_a = \frac{2}{33}$ val., užduotį atliksime tik per $1\frac{2}{33}$ val. Į priekį važiuosime

$$v_p = \frac{10 + 60t_p}{t_p} = 70\,(\text{km/h})$$

greičiu, atgal

$$v_a = \frac{10 - 60t_a}{t_a} = 105\,(\text{km/h})$$

greičiu, o vidutinis užduoties atlikimo greitis bus 72 km/h.

Taigi teisingas valstybinio egzamino uždavinio atsakymas turėtų būti toks: motociklininkas, važiuodamas vidutiniu 72 km/h ar 71 km/h greičiu, užduotį gali atlikti laiku, bet gali ir nespėti.

PRIEŠ PENKIASDEŠIMT METŲ

Septynmetės mokyklos matematikos egzaminas

1. Pionierių stovyklai pirktas tam tikras kiekis miltų ir cukraus. Miltų pirkta 2,5 karto daugiau negu cukraus. Sunaudojus 260 kg ir 134 kg cukraus pasirodė, kad likęs cukraus kiekis sudaro 30% likusio miltų kiekio. Kiek kilogramų cukraus ir kiek kilogramų miltų buvo pirkta pionierių stovyklai?
2. Atlikti veiksmus:

$$\left(\frac{1 + 2y - 3y^2}{1 - y^2} - \frac{1 - y^2}{2y + 2y^2 - 3 - 3y} \cdot \frac{1 + y}{2y - 3}\right) : \frac{4}{1 - y^2}.$$

3. Atlikti veiksmus:

$$\frac{(0{,}36 - \frac{4}{15} : 3\frac{1}{3}) \cdot 5\frac{5}{7}}{26\frac{5}{8} - 5\frac{7}{24}}.$$

Geometrijos su trigonometrija abitūros egzaminas

Į kūgio ašinį pjūvį įbrėžtas skritulys, kurio spindulys lygus R. Kampas prie ašinio pjūvio viršūnės lygus α. Rasti įbrėžtos į šį kūgį keturkampės taisyklingosios piramidės tūrį ir šoninį paviršių. Apskaičiuoti imant $R = 9{,}5$ dm; $\alpha = 48^\circ 14'$.