$\alpha + \omega$, 2003, Nr. 1, 82–83

Matematinės indukcijos taikymas nelygybėms

Bronė Narkevičienė, Leonas Narkevičius
bronar@gim.ktu.lt, leonasn@gim.ktu.lt

Ankstesniame žurnalo straipsnyje išsiaiškinome matematinės indukcijos metodą ir kaip jis taikomas sekų formulėms įrodyti. Dabar matematinės indukcijos metodą taikysime nelygybėms įrodyti.

1 pavyzdys. *Įrodysime, kad*

$$2^n > 2n + 1, \quad n \geqslant 3. \tag{1}$$

Įrodymas. 1) Kai $n = 3$, tai $2^3 > 2 \cdot 3 + 1, 8 > 7$. Taigi (1) nelygybė, kai $n = 3$, teisinga.

2) Tarkime, kad (1) nelygybė teisinga, kai $n = k$ $(k > 3)$, t. y. $2^k > 2k + 1$.

3) Įrodysime, kad (1) nelygybė teisinga, kai $n = k + 1$, t. y. $2^{k+1} > 2(k + 1) + 1 = 2k + 3$. Iš tikrųjų

$$2^{k+1} = 2^k \cdot 2 > (2k + 1) \cdot 2 = (2k + 3) + (2k - 1).$$

Kadangi $k > 3$, tai $2k—1 > 0$, todėl

$$2^{k+1} > 2k + 3.$$

Taigi tarę, kad (1) nelygybė teisinga, kai $n = k$, įrodėme, kad ji teisinga, kai $n = k + 1$.

Remdamiesi matematinės indukcijos principu, teigiame, kad (1) nelygybė teisinga, kai $n \geqslant 3$.

2 pavyzdys. *Įrodysime, kad*

$$(1 + \alpha)^n > 1 + n\alpha, \quad \alpha > 0, \ n \geqslant 2. \tag{2}$$

Įrodymas. 1) Kai $n = 2$, gauname teisingą nelygybę $(1 + \alpha)^2 > 1 + 2\alpha$.

2) Tarkime, kad nelygybė (2) teisinga, kai $n = k$ $(k > 2)$, t. y. $(1 + \alpha)^k > 1 + k\alpha$.

3) Įrodysime, kad nelygybė (2) teisinga, kai $n = k + 1$, t. y.

$$(1 + \alpha)^{k+1} > 1 + (k + 1)\alpha.$$

Iš tikrųjų, kadangi $\alpha > 0$, tai $1 + \alpha > 0$, ir

$$(1 + \alpha)^{k+1} = (1 + \alpha)(1 + \alpha)^k > (1 + \alpha)(1 + k\alpha) = 1 + (k + 1)\alpha + k\alpha^2.$$

Kadangi $k\alpha^2 > 0$, tai

$$(1 + \alpha)^{k+1} > 1 + (k + 1)\alpha.$$

Vadinasi, (2) nelygybė teisinga, kai $n \geqslant 2$. Ši nelygybė vadinama *Bernulio nelygybe.*

3 pavyzdys. *Įrodysime, kad*

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}>\frac{n}{2}, \quad n\in N. \tag{3}$$

Įrodymas. 1) Kai $n=1$, gauname teisingą nelygybę $1>\frac{1}{2}$.
2) Tarkime, kad (3) nelygybė teisinga, kai $n=k$, t. y.

$$S_k=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k-1}>\frac{k}{2}.$$

3) Įrodysime, kad (3) nelygybė teisinga, kai $n=k+1$, t. y.

$$S_{k+1}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}-1}>\frac{k+1}{2}.$$

Iš tikrųjų

$$S_{k+1}=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k-1}\right)+\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}-1}\right)=S_k+P_k,$$

čia

$$P_k=\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}-1}.$$

Sumą P_k sudaro 2^k trupmenų suma. Kiekviena trupmena didesnė už trupmeną $\frac{1}{2^{k+1}}$. Vadinasi,

$$P_k=\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}-1}>\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^{k+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}}=$$
$$=2^k\cdot\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2}.$$

Kadangi $S_k>\frac{k}{2}$, $P_k>\frac{1}{2}$, tai $S_{k+1}=S_k+P_k>\frac{k+1}{2}$. Taigi (3) nelygybė teisinga su visomis natūraliosiomis n reikšmėmis.

Uždaviniai
Pasinaudoję matematine indukcija įrodykite nelygybes:

1. $a^n>b^n$, kai $a>b$ ir a, b — teigiami skaičiai.
2. $(a+b)^n\leqslant 2^{n-1}(a^n+b^n)$, kai a ir b — teigiami skaičiai.
3. $2^n>n^2$, $n\geqslant 5$.
4. $2^n>n^3$, $n\geqslant 10$.
5. $2^{n+2}>n+5$, $n\geqslant 1$.
6. $3^n>2^n+7$, $n\geqslant 4$.
7. $2^n>n^2+4n+5$, $n\geqslant 7$.
8. $2^n>3n-1$, $n\geqslant 4$.
9. $2^n>2n+7$, $n\geqslant 4$.
10. $3n^2+7>9n$, $n\geqslant 1$.
11. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$, $n>1$.
12. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$, $n>1$.
13. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}<n$, $n>1$.
14. $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$, $n>1$.
15. $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$, $n>1$.
16. $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<1$, $n\geqslant 1$.
17. $n!>2^n$, $n\geqslant 4$.
18. $\frac{4^n}{n+1}<\frac{(2n)!}{(n!)^2}$, $n\geqslant 2$.
19. $n!>2^{n-1}$, $n\geqslant 3$
20. $(\frac{n}{3})^n<n!$, $n\geqslant 1$.