$\alpha + \omega$, 2003, Nr. 1, 62–65

Atsakymas V. Vanagui ir mokytojui A. Petroniui

Ričardas Kudžma
ricardas.kudzma@maf.vu.lt

Straipsnyje analizuojamas bendros dviejų kvadratinių funkcijų liestinės radimo uždavinys. Primenama: atlikus formalius veiksmus, ne visada gaunama tai, ko ieškoma!

Praėjusių metų paskutiniame „Alfa plus omega" numeryje perskaičiau V. Vanago klausimą apie mokytojo A. Petronio vieno uždavinio sprendimą ir panorau jį pakomentuoti. Prisiminkime uždavinio sąlygą ir sprendimą.

Ar turi funkcijų $y = 5x^2 - 2x + 3$ ir $y = x^2 + 2x + 2$ grafikai bendrą liestinę, nubrėžtą per jų bendrą tašką? Jei turi, tai parašykite šios liestinės lygtį.

Siūlau spręsti taip:

$$\begin{cases} y = 5x^2 - 2x + 3, \\ y = x^2 + 2x + 2 \,|\cdot(-5). \end{cases}$$

Sudėkime, kad neliktų x^2:

$$\begin{cases} y = 5x^2 - 2x + 3, \\ -5y = -5x^2 - 10x - 10, \end{cases}$$

$$-4y = -12x - 7 \,|\cdot(-1),$$

$$4y = 12x + 7.$$

V. Vanagui šis sprendimas pasirodė keistas. Jis klausia, ar iš tikrųjų taip galima spręsti. Prieš atsakydami į šį klausimą pažymėkime $f(x) = 5x^2 - 2x + 3$, o $g(x) = x^2 + 2x + 2$ ir pakeiskime pirmąją funkciją:

$$f_1(x) = f(x) + 1 = 5x^2 - 2x + 4, \qquad f_2(x) = f(x) - 1 = 5x^2 - 2x + 2.$$

Panaikinkime kvadratinius narius lygčių sistemose

$$\begin{cases} y = 5x^2 - 2x + 4, \\ y = x^2 + 2x + 2, \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 5x^2 - 2x + 2, \\ y = x^2 + 2x + 2. \end{cases}$$

Tam reikia padauginti antrąsias lygtis iš 5 ir atimti vieną iš kitos. Gausime pirmojo laipsnio (tiesių) lygtis

$$4y = 12x + 6, \qquad 4y = 12x + 8,$$

$$2y = 6x + 3, \qquad y = 3x + 2.$$

Koks šių tiesių ryšys su funkcijų f_1, f_2 ir g grafikais? Ar tikrai gautosios tiesės yra bendros grafikų liestinės, einančios per bendrus taškus? Atsakymo į šiuos klausimus neturime, nes uždavinį pradėjome spręsti ne iš to galo.

Grįžkime prie pradinio uždavinio. Mano galva, nagrinėjamas uždavinys yra labai geras. Jo sprendimą suskaidyčiau į etapus:

1. Geometriškai suformuluotą klausimą „Ar turi funkcijų $f(x) = 5x^2 - 2x + 3$ ir $g(x) = x^2 + 2x + 2$ grafikai bendrą tašką?" reiktų pakeisti algebros kalba suformuluotu klausimu: „Ar lygtis
$$f(x) = g(x) \tag{1}$$
turi sprendinį?"

2. Išspręsti (1) lygtį.
3. Geometriškai suformuluotą klausimą „Ar turi funkcijų $f(x) = 5x^2 - 2x + 3$ ir $g(x) = x^2 + 2x + 2$ grafikai bendrą liestinę, einančią per bendrą tašką?“ reiktų pakeisti algebros kalba suformuluotu klausimu: „Ar
$$f'(x) = g'(x), \tag{2}$$
kai x yra (1) lygies sprendinys?“
4. Jei 2 ir 3 etapų atsakymai teigiami, tai lieka parašyti bendros liestinės, einančios per bendrą tašką, lygtį.

Beje, (1) ir (2) lygtis galima sujungti į lygčių sistemą
$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f'(x) = g'(x). \end{cases} \tag{3}$$

Mano supratimu, pirmasis ir trečiasis etapai yra svarbiausi. Jie parodo, kaip moksleivis supranta esminius algebros (analizės) ir geometrijos ryšius. Antroji dalis yra standartinė — kvadratinės lygties sprendimas. Ketvirtoji dalis — reikia įstatyti į liestinės formulę jau žinomus dydžius.

Manau, kad mokytojas A. Petronis puikiai supranta visus šiuos etapus, bet jam toks kelias atrodo per ilgas. Jis nori paspartinti procesą ir pasiūlė būdą, kaip iškart rasti lygtį bendros liestinės, einančios per bendrą tašką. Tačiau neskubėkime ir išspręskime (1) lygtį visais trimis atvejais:

1)
$$\begin{aligned} 5x^2 - 2x + 3 &= x^2 + 2x + 2, \\ 4x^2 - 4x + 1 &= 0, \\ (2x-1)^2 &= 0, \\ x_{1,2} &= \frac{1}{2}; \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} f_1(x) &= g(x), \\ 5x^2 - 2x + 4 &= x^2 + 2x + 2, \\ (2x-1)^2 + 1 &= 0, \\ &\varnothing; \end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned} f_2(x) &= g(x), \\ 5x^2 - 2x + 2 &= x^2 + 2x + 2, \\ 4x^2 - 4x &= 0, \\ 4x(x-1) &= 0, \\ x_1 &= 0, x_2 = 1. \end{aligned}$$

Kaip matome, pirmuoju atveju gauname vieną sprendinį, antruoju sprendinių nėra, o trečiuoju — du sprendiniai. Nesunku patikrinti (2) sąlygą:
$$f'(x) = 10x - 2, \qquad f'\left(\frac{1}{2}\right) = 5 - 2 = 3,$$
$$g'(x) = 2x + 2, \qquad g'\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 = 3.$$

Kai turime liestinės tašką ir jos posvyrį (krypties koeficientą), tai galime iškart parašyti liestinės lygtį. Tiesa, dar reikia apskaičiuoti
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 = \frac{5}{4} - 1 + 3 = \frac{13}{4}.$$

Įstatome visus duomenis į liestinės lygtį:

$$
\begin{aligned}
y &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \qquad (4)\\
y &= \frac{13}{4} + 3\left(x - \frac{1}{2}\right),\\
4y &= 13 + 12\left(x - \frac{1}{2}\right),\\
4y &= 12x + 7.
\end{aligned}
$$

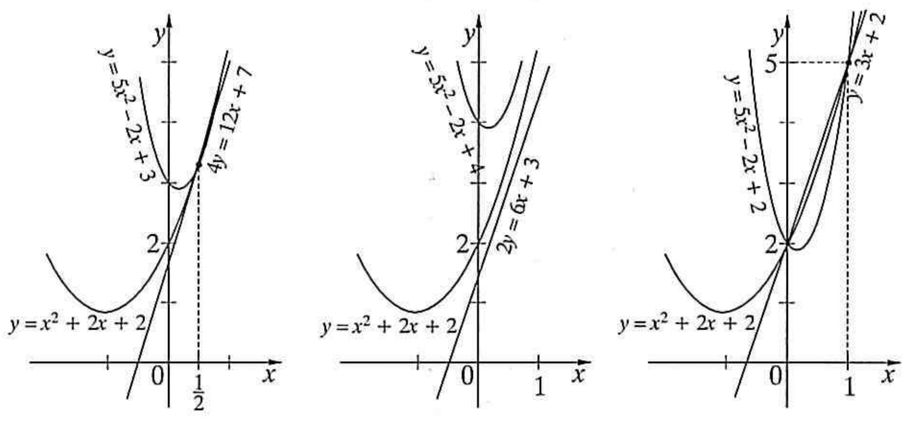
Gavome tą pačią, kaip ir mokytojas A. Petronis, lygtį.

Antruoju atveju funkcijų f_1 ir g grafikai bendrų taškų neturi. Taigi ir bendros liestinės, einančios per bendrą tašką, taip pat nėra.

Trečiuoju atveju nesunku patikrinti, kad:

$$
\begin{aligned}
&f'(x) = f_2'(x) = 10x - 2,\\
&f_2'(0) = -2, \qquad g'(0) = 2, \qquad f_2'(0) \neq g'(0),\\
&f_2'(1) = 8, \qquad g'(1) = 4, \qquad f_2'(1) \neq g'(1).
\end{aligned}
$$

Taigi per bendrus funkcijų f_2 ir g grafikų taškus einančios liestinės nesutampa. Įspūdžiui sustiprinti nubraižykime grafikus.



Matome, kad mokytojo A. Petronio siūlomą sprendimo būdą galime taikyti visada, bet teisingą atsakymą gauname ne visada. Tačiau vis dėlto įdomu, kodėl kai kada šiuo būdu gaunamas teisingas rezultatas? Pabandysiu tai pagrįsti Teiloro formule — vienu svarbiausių matematinės analizės faktų. Trumpai priminsiu.

Jei funkcija f yra n kartų diferencijuojama taške x_0, tai šio taško aplinkoje yra teisingas skleidinys (Teiloro formulė)

$$
f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''x_0}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n; \qquad (5)
$$

čia R_n — liekamasis narys (skirtumas tarp funkcijos reikšmės $f(x)$ ir polinomo $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$, vadinamo Teiloro polinomu). Priklausomai nuo funkcijos papildomų savybių yra žinomos įvairios liekamojo nario išraiškos. Pirmieji du Teiloro formulės nariai yra funkcijos f tiesinis aproksimavimas taško x_0 aplinkoje, o jau anksčiau minėta (4) lygtis nusako funkcijos grafiko liestinę, einančią per tašką $(x_0; f(x_0))$.

Mūsų uždaviniui labai svarbus specialus Teiloro formulės atvejis, kai funkcija f yra n-ojo laipsnio polinomas. Tada liekamasis narys R_n lygus nuliui. Taigi bet kokį antrojo laipsnio polinomą $f(x) = ax^2 + bx + c$ galima užrašyti tokia forma:

$$y = ax^2 + bx + c = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2, \tag{6}$$

$$y = ax^2 + bx + c = ax_0^2 + bx_0 + c + (2ax_0 + b)(x - x_0) + \frac{1}{2} \cdot 2a(x - x_0)^2;$$

čia x_0 — bet koks realusis skaičius. Paskutinę lygybę galima tiesiogiai patikrinti ir išmesti iš galvos visas pasakas apie Teiloro formulę. Taip pat galime užrašyti ir kitą polinomą $g(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$:

$$y = a_1x^2 + b_1x + c_1 = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}g''(x_0)(x - x_0)^2. \tag{7}$$

Aišku, kad $a = \frac{1}{2}f''(x)$, $a_1 = \frac{1}{2}g''(x)$, $\forall x$, $x \in \boldsymbol{R}$. Padauginkime (6) lygybę iš a_1, o (7) — iš a:

$$a_1y = a_1ax^2 + a_1bx + a_1c = a_1f(x_0) + a_1f'(x_0)(x - x_0) + a_1\frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2, \tag{8}$$

$$ay = aa_1x^2 + ab_1x + ac_1 = ag(x_0) + ag'(x_0)(x - x_0) + a\frac{1}{2}g''(x_0)(x - x_0)^2. \tag{9}$$

Iš (8) lygties atimkime (9). Kvadratiniai nariai pasinaikins:

$$(a_1 - a)y = (a_1b - ab_1)x + a_1c - ac_1, \tag{10}$$

$$(a_1 - a)y = a_1f(x_0) - ag(x_0) + \big(a_1f'(x_0) - ag'(x_0)\big)(x - x_0). \tag{11}$$

Gautosios (10) ir (11) lygtys yra ekvivalenčios — jos nusako tą pačią tiesę. Tačiau (11) lygtis yra informatyvesnė. Čia ir prasideda įdomiausioji sprendimo dalis! Jei egzistuoja toks x_0, kad

$$f(x_0) = g(x_0) \quad \text{ir} \quad f'(x_0) = g'(x_0), \tag{12}$$

tai (11) lygtį galime transformuoti:

$$(a_1 - a)y = (a_1 - a)f(x_0) + (a_1 - a)f'(x_0)(x - x_0). \tag{13}$$

Jei $a \neq a_1$, tai padalykime (13) lygtį iš $a - a_1$ ir gausime abiejų funkcijų grafikų bendros liestinės, einančios per bendrą tašką, lygtį. Tačiau mes nežinome, ar egzistuoja toks x_0, tenkinantis (12) sąlygas. Aš nežinau jokio kito būdo tai išsiaiškinti, kaip tik išspręsti straipsnelio pradžioje minėtą (3) lygčių sistemą

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f'(x) = g'(x). \end{cases}$$

Išsprendę šią sistemą, sužinome, ar egzistuoja toks objektas (liestinė), kurio reikalauja uždavinio sąlyga. Beje, sąlygoje labai aiškiai atskirti du klausimai — objekto egzistavimas ir jo radimas. Kai turime teigiamą atsakymą į pirmąjį klausimą, tai jau skonio reikalas, kaip parašyti liestinės lygtį — ar įstatyti duomenis į žinomą (4) formulę, ar eliminuoti iš lygčių sistemos kvadratinius narius (žinoma, pagrindžiant, kad taip gauname ieškomos liestinės lygtį).

Mokytojas A. Petronis savo straipsnyje „Dialoge" rašo, kad reikia ugdyti mąstantį jaunimą, kad atsakymų negalima „nuleisti iš dangaus", juos reikia pagrįsti. Kas tam gali nepritarti? Pasakyta šventa tiesa. Tačiau jo siūlomas sprendimas tikrai yra „nukritęs iš dangaus" ir visiškai niekuo nepagrįstas. Teisingas atsakymas gaunamas tik tada, kai sprendinys egzistuoja. Tai parodyti ir buvo šio straipsnelio tikslas. Visais kitais atvejais — tai tik formalūs algebriniai pertvarkymai. Mąstymu juos sunku pavadinti. Geriausiu atveju — ieškojimu, hipotezės kėlimu. Tai pagirtina. Tačiau po to visus spėjimus reikia pagrįsti!

$\alpha + \omega$