$\alpha + \omega$, 2003, Nr. 1, 58–61

Matematikos brandos egzaminas vienoje Serbijos gimnazijoje

Algirdas Zabulionis
algisz@nec.lt

Matematikos brandos egzamino užduotis — tai šalies matematikos švietimo veidrodis, realiai parodantis, kokių matematikos žinių ir gebėjimų tikimės iš jaunosios kartos. Įdėmiai analizuodami įvairių šalių vidurinių mokyklų baigiamųjų egzaminų užduotis, galime suprasti, kuri dalis lietuvaičių galės konkuruoti su kitų šalių bendraamžiais Europos universitetuose, vis platėjančioje pasaulinėje darbo rinkoje. Tai nėra vien skambūs žodžiai — nuo to priklauso ekonominė šalies gerovė, mūsų ateitis.

Šiame žurnalo numeryje siūlome susipažinti su vienos iš buvusių Jugoslavijos respublikų — Serbijos sostinės Belgrado matematinės gimnazijos 2001 metų brandos egzamino užduotimi. Šioje šalyje nėra centralizuotų brandos egzaminų, kiekviena mokykla pati savo abiturientams kuria 12-metės vidurinės mokyklos baigiamojo matematikos egzamino užduotis. Tačiau tai nereiškia, kad egzaminas tampa formalus ir lengvas — pažvelkite į pateikiamą užduotį. Tikrai daug yra matematikos temų, kurių mūsų moksleiviai nesimoko, uždaviniai sudėtingi. Labai neliūdėkime — tai nėra eilinės vidurinės mokyklos egzaminas. Ši gimnazija, įkurta 1966 metais, yra ypatinga. Per 35 metus jos moksleiviai tarptautinėse matematikos, fizikos, informatikos olimpiadose laimėjo daugiau kaip 200 medalių! 1996–2001 metais tarptautinėse jaunųjų matematikų olimpiadose IMO moksleiviai laimėjo 3 aukso, 26 sidabro ir 43 bronzos medalius. Gimnazijos absolventai sėkmingai studijuoja Oksfordo, Kembridžo, Harvardo, Stenfordo universitetuose, Masačiusetso technologijos institute. Daugiau informacijos apie Belgrado matematinę gimnaziją galima rasti internete adresu www.mg.edu.yu.

Lietuvos gimnazijos moksleiviai, pabandykite išspręsti šias brandos egzamino užduotis ir neakivaizdžiai palyginti savo gebėjimus su serbų gimnazistų! Galite pasirinkti vieną iš dviejų egzamino formų: užduotį iš 5 uždavinių arba testą iš 20 klausimų. Testą atlikti skiriamos 3 valandos.

Matematikos brandos egzamino užduotis

1. Išspręskite nelygybę su realiuoju parametru α: $\sqrt{2-x} \geqslant \frac{-x}{2} + \alpha$.

2. Išspręskite nelygybę $\log_{\operatorname{tg} x} \sin x - \log_{\operatorname{ctg} x} \cos x \geqslant 3$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

3. Apskaičiuokite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \sin \frac{k\pi}{3}.$$

4. Ištirkite funkciją

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 - 4}}$$

ir nubraižykite jos grafiką.

5. Yra integralas

$$I_n = \int \frac{\cos^{2n} x \, dx}{\sin x}, \quad n \in N.$$

a) Raskite skaičius a, b ir c, priklausančius nuo n, su kuriais teisinga lygybė $aI_{n+1} = bI_n + \cos^c x$.

b) Apskaičiuokite

$$\int \frac{\cos^6 x \, dx}{\sin x}.$$

Testas

1. Funkcijos $f(x) = x \ln(x + 1)$ skleidinio Makloreno eilute koeficientas prie x^2 lygus

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** 4

2. Jeigu skaičiai a, b, c yra reiškinių $\sqrt[n]{n}$, $(\frac{n}{n+1})^n$, $\frac{n!}{n^n}$ ribos, tai reiškinio $\frac{a}{b+c}$ reikšmė yra

A c **B** 1 **C** e^{-1} **D** 0 **E** neapibrėžta

3. Jeigu $|a| \neq |b|$, tai reiškinys

$$\frac{a^3 + b^3}{a + b} : (a^2 - b^2) + \frac{2b}{a + b} - \frac{ab}{a^2 - b^2}$$

lygus

A 1 **B** $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$ **C** $\frac{a-b}{a+b}$ **D** $\frac{ab}{a+b}$ **E** $\frac{a^2-ab+b^2}{a-b}$

4. Lygtis

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\sin^2 x - \cos^2 x} + \left(\frac{2}{3}\right)^{\cos 2x} = \frac{13}{6}$$

intervale $(-100; 101)$ turi

A 127 **B** 128 **C** 126 **D** 63 **E** 64 sprendinius

5. Jei

$$f(x) = \frac{1}{6} \ln \frac{(x + 1)^2}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}},$$

tai $\dfrac{f'(1) - f'(2)}{7}$ lygu

A 0 **B** 1 **C** 12^{-1} **D** 128^{-1} **E** 14^{-1}

6. Jeigu $0 < a < b$, tai reiškinio

$$\left(1 + \left(\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^{-0,5} - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^{-0,5}\right)^{-2}\right)^{0,5}$$

reikšmė lygi

A 1 **B** $\frac{b-a}{ab}$ **C** $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2$ **D** $\frac{a+b}{a-b}$ **E** $\frac{a+b}{b-a}$

7. Lygties $\sqrt{3x + 10} + \sqrt{x - 2} = 2\sqrt{x + 2}$ sprendinių skaičius yra lygus

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** 4

8. Nelygybių sistemą
$$\begin{cases} |z-2i| \geqslant |z+1|, \\ |z-2i| \leqslant \frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}$$
tenkinantys kompleksiniai skaičiai kompleksinėje plokštumoje vaizduojami

A tuščia aibė **B** aibė iš vieno elemento **C** skritulio nuopjova **D** skritulys
E pusplokštumė

9. Jeigu
$$a = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}, \quad b = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}\right)^{\sin^{-2} x},$$
tai reiškinio $\frac{a}{b}$ reikšmė yra

A $\frac{1}{2}$ **B** 2 **C** 0 **D** 1 **E** neapibrėžta

10. Kūgio, kurio sudaromosios ilgis yra l, didžiausias galimas tūris lygus

A $\frac{2\pi l^3\sqrt{2}}{27}$ **B** $\frac{4\pi l^3\sqrt{3}}{27}$ **C** $\frac{5\pi l^3\sqrt{3}}{27}$ **D** $\frac{3\pi l^3\sqrt{3}}{27}$ **E** $\frac{2\pi l^3\sqrt{3}}{27}$

11. Lygtis $\sqrt{\log_3 x} - \log_3 27x + 5 = 0$

A neturi sprendinių
B turi lygiai vieną, didesnį už 20 sprendinį
C turi daugiau kaip 2 sprendinius
D turi lygiai vieną sprendinį, kuris mažesnis už 20
E turi lygiai du sprendinius

12. Sistema
$$\begin{cases} (x+1)^2 + y^2 \leqslant 8, \\ y - x = a \end{cases}$$
turi vienintelį sprendinį, kai realiojo parametro a reikšmė lygi

A -3 **B** 5 **C** 2 **D** 8 **E** 0

13. Aritmetinės progresijos, kurios visi nariai skirtingi, pirmasis, ketvirtasis ir tryliktasis nariai sudaro geometrinę progresiją. Jeigu pirmasis narys lygus 18, tai dešimtasis narys lygus

A 72 **B** 138 **C** 126 **D** 114 **E** 98

14. Jeigu
$$\int \frac{\ln x \, \mathrm{d}x}{x\sqrt{1+\ln x}} = F(x) + C,$$
tai reiškinio $F(\mathrm{e}^3) - F(1)$ reikšmė lygi

A $\frac{10}{3}$ **B** $\frac{11}{3}$ **C** $\frac{4}{3}$ **D** $\frac{5}{3}$ **E** $\frac{8}{3}$

15. Funkcijos $f(x) = x(x^2+1)^{-\frac{1}{3}}$ grafiko vingio taškų skaičius lygus

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** 4

16. Realiojo parametro m reikšmių, su kuriomis kvadratinė lygtis $(m-2)x^2 - 2mx + 2m + 2 = 0$ turi realiuosius skirtingų ženklų sprendinius, aibė yra

A $(-1; 2)$ **B** $(1-\sqrt{5}; 1) \cup (2; 1+\sqrt{5})$ **C** $(1-\sqrt{5}; 1+\sqrt{5})$ **D** $(2; +\infty)$ **E** tuščia

17. Nelygybės
$$\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x \leqslant 98$$
mažiausiojo ir didžiausiojo sprendinių sandauga lygi

A -8 **B** $20\sqrt{3} - 74$ **C** -12 **D** -16 **E** -4

18. Funkcijos

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^2+2|x|}{x^2-9}}$$

apibrėžimo ir reikšmių sričių sankirta yra

A $(-2; 5)$ **B** $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$ **C** $(-10; 1)$ **D** $(-1; +\infty)$ **E** $(-\infty; 3)$

19. Tegu $p(x)$ yra n-ojo, $n \geqslant 3$, laipsnio daugianaris. Jeigu dalijant $p(x)$ iš $x+1$ gaunama liekana 2, o dalijant iš x^2+1 — liekana $x-1$, tai $p(x)$ dalybos iš $(x+1)(x^2+1)$ liekana yra

A $-\frac{3}{2}x^2+x+\frac{1}{2}$ **B** $2x^2+x+1$ **C** $-x^2+x+4$ **D** $2x-2$ **E** $x+1$

20. Sandėliuke yra 12 skirtingų porų batų. Keliais būdais galima parinkti 4 batus, kad iš jų būtų galima sudaryti bent vieną porą?

A 2100 **B** 3360 **C** 2706 **D** 1485 **E** 2546

Pastaba. Testo 1–3 uždavinių kiekvienas teisingas atsakymas vertinamas 3 taškais, 4–7 uždavinių — 4 taškais, 8–13 uždavinių — 5 taškais, 14–17 uždavinių — 6 taškais, 18–20 uždavinių — 7 taškais.

I N F O

KENGŪRA 2003

Kovo 20 d. vyko KENGŪROS konkursas. Jame dalyvavo 57 313 moksleivių iš 1013 mokyklų. Rezultatai bus skelbiami gegužės 1 d. internete adresu www.kengura.lt.

Kaip ir pernai, geriausiai pasirodžiusieji bus apdovanojami diplomais ir prizais. Taip pat geriausieji bus kviečiami į KENGŪROS stovyklas.