$\alpha + \omega$, 2003, Nr. 1, 50–57

Diferencialinio skaičiavimo elementai ir ekonomikos uždaviniai

Kazimieras Pulmonas

Straipsnyje nagrinėjami ekonominės veiklos rodiklių optimizavimo uždaviniai. Jie sprendžiami taikant funkcijų išvestines.

Bendrojo lavinimo pagrindinėje mokykloje mokiniai supažindinami su ekonomikos pagrindais: mokymo programose yra numatytas ekonomikos klausimų nagrinėjimas. Profiliuoto mokymo klasių mokiniai gali rinktis ekonomikos mokymosi pakraipą.

Labai svarbu ekonomikos klausimų nagrinėjimą sumaniai integruoti ne tik į pagrindinės mokyklos matematikos programą, bet ir į aukštesniųjų klasių ugdymo turinį.

Diferencialinio skaičiavimo aparatas sudaro galimybę šalia dabar nagrinėjamų įprastų geometrijos ir fizikos uždavinių spręsti ir kai kuriuos ekonomikos uždavinius. Išvestinių taikymo būtinybė dažnai kyla analizuojant ekonomikos problemas, ieškant tam tikro rodiklio optimalios reikšmės, nuo kurios priklauso kompanijos finansiniai reikalai. Pavyzdžiui, norėdami efektyviai organizuoti firmos veiklą finansų menedžeriai būtinai turi žinoti optimalius kaštų dydžius, optimalias gaminamos produkcijos apimtis, optimalų darbuotojų skaičių ir pan. Šio tipo uždaviniai sudaro klasę ekonominių ekstremumo uždavinių, kuriuos sprendžiant reikia taikyti išvestines, mokėti tirti funkcijas.

Panagrinėkime keletą ekonominio turinio ekstremumo uždavinių, sprendžiamų XII klasėje nagrinėjant išvestines. Pradėkime nuo firmos, veikiančios *konkurencinėje rinkoje*, strategijos parinkimo uždavinio. Paprastai *konkurencinė rinka* charakterizuojama tokiais *pagrindiniais požymiais*:

- egzistuoja pakankamai didelis skaičius santykiškai smulkių firmų (pardavėjų);
- yra aibė pirkėjų, gerai informuotų apie įsigyjamą produkciją;
- parduodama produkcija savo charakteristikomis yra vienalytė;
- nėra ekonominių barjerų produkcijos gamintojui patekti į rinką ir iš jos išeiti.

Svarbu tai, kad tokioje rinkoje firma negali daryti įtakos rinkos kainai, t. y. firma, veikianti konkurencinėje rinkoje, gali parduoti savo produkciją pagal susiklosčiusią *rinkos kainą* P (*Price*) piniginių vienetų už prekės vienetą. Akivaizdus pavyzdys yra žemės ūkio produkcijos rinka.

Bet kurios firmos, veikiančios konkurencinės rinkos sąlygomis, svarbiausias tikslas — gauti didžiausią *pelną*. *Pelnas* Π (*Profit*) yra apibrėžiamas kaip bendrųjų *įplaukų* R (*Revenue*), gautų realizavus Q (*Quantity*) produkcijos vienetų, ir bendrųjų *kaštų* C (*Costs*), susijusių su produkcijos gamyba ir realizavimu, skirtumas. Todėl paprastai pelnas yra nusakomas funkcija

$$\Pi(Q) = R(Q) - C(Q).$$

Konkrečios firmos bendrąsias įplaukas sudaro pinigų suma, gauta pardavus Q produkcijos vienetų po P piniginių vienetų už kiekvieną prekės vienetą, todėl $R(Q) = P \cdot Q$. Vadinasi,

$$\Pi(Q) = P \cdot Q - C(Q).$$

Taigi firmai iškyla uždavinys — išsiaiškinti, kokį produkcijos kiekį Q ji turi pagaminti, kad jį realizavusi gautų maksimalų pelną. Tai standartinis diferencialinio skaičiavimo uždavinys — rasti argumento reikšmę, su kuria funkcija įgyja didžiausią tam tikrame intervale reikšmę.

Taikomieji ekstremumo uždaviniai paprastai sprendžiami pagal schemą, kurią sudaro trys etapai:

I. Matematinio modelio kūrimas (optimizuojamo dydžio užrašymas tam tikro argumento funkcija).

II. Matematinio modelio analizė (funkcijos ekstremumų tyrimas matematinės analizės priemonėmis).

III. Rezultatų interpretavimas ekonomikos terminais.

Štai keletas produkcijos gamybos optimalios apimties nustatymo konkurencinėje rinkoje uždavinių.

1 pavyzdys. *Akcinė bendrovė (AB) veikia konkurencinėje rinkoje ir gamina sportinukus. Sportinukų gamybos kaštai išreiškiami funkcija* $C(Q) = \frac{1}{3}Q^3 + 2Q^2 - 2Q$; *čia* Q — *sportinukų skaičius šimtais vienetų. Žinoma, kad gamybiniai ir technologiniai AB pajėgumai leidžia kasdien jai pagaminti ir realizuoti ne daugiau* 250 *sportinukų. Apskaičiuokite, kiek sportinukų turi pagaminti AB kasdien, kad gautų didžiausią dienos pelną, jeigu sportinuko rinkos kaina yra* 10 Lt?

Sprendimas. I etapas. AB pelno funkcija yra

$$\begin{aligned}\Pi(Q) &= R(Q) - C(Q) = P \cdot Q - C(Q) = \\ &= 10 \cdot Q - \left(\frac{1}{3}Q^3 + 2Q^2 - 2Q\right) = \\ &= -\frac{1}{3}Q^3 - 2Q^2 + 12Q.\end{aligned}$$

Kadangi pagal uždavinio prasmę $Q \geqslant 0$, tai reikia rasti funkcijos $\Pi(Q)$ didžiausią reikšmę intervale $[0; 2{,}5]$.

II *etapas.* Randame funkcijos $\Pi(Q)$ išvestinę $\Pi'(Q) = -Q^2 - 4Q + 12$. Randame $\Pi(Q)$ ekstremumo taškus: $-Q^2 - 4Q + 12 = 0$, $Q_1 = -6 \notin [0; 2{,}5]$, $Q_2 = 2 \in [0; 2{,}5]$.

Kadangi $\Pi(0) = 0$, $\Pi(2) = 13\frac{1}{3}$, $\Pi(2{,}5) = 12\frac{7}{24}$, tai funkcijos $\Pi(Q)$ didžiausia reikšmė intervale $[0; 2{,}5]$ lygi $13\frac{1}{3}$ ir ji yra įgyjama, kai $Q = 2$.

III *etapas.* Didžiausio pelno AB gali tikėtis pagamindama po 200 sportinukų kasdien.

Atsakymas. 200 sportinukų.

2 pavyzdys. *Agurkų rinkos kilogramo kaina yra* 2 Lt. *Įvairios jų auginimo šiltadaržyje C išlaidos, priklausomai nuo agurkų kiekio* (kg) *išreiškiamos funkcija* $C(Q) = \frac{1}{200}Q^2 + 5$. *Kiek kilogramų agurkų turi išauginti šiltadaržio šeimininkas per sezoną, kad jo gautas pelnas būtų didžiausias? Apskaičiuokite šį pelną ir įvairių išlaidų agurkams išauginti sumas.*

Sprendimas. I etapas. Šiltadaržio šeimininko pelno už agurkus funkcija yra

$$\Pi(Q) = R(Q) - C(Q) = P \cdot Q - C(Q) = 2Q - \left(\frac{1}{200}Q^2 + 5\right) = -\frac{1}{200}Q^2 + 2Q - 5.$$

Kadangi $Q \geqslant 0$, tai funkcijos $\Pi(Q)$ didžiausią reikšmę reikia rasti intervale $[0; +\infty)$.

II *etapas.* Pelno funkcija $\Pi(Q)$ yra kvadratinė funkcija, todėl šį uždavinio sprendimo etapą galima įveikti įvairiai. Jeigu taikome išvestinę, tai:

$$\Pi'(Q) = -\frac{1}{100}Q + 2, \qquad -\frac{1}{100}Q + 2 = 0, \qquad Q = 200.$$

Taškas $Q = 200$ yra funkcijos $\Pi(Q)$ kritinis taškas. Kadangi $\Pi'(Q) > 0$ su bet kuria reikšme $Q \in [0; 200)$, o $\Pi'(Q) < 0$ su bet kuria reikšme $Q \in [200; +\infty)$ ir taške $Q = 200$ funkcija $\Pi(Q)$ yra tolydi, tai ji yra didėjanti intervale $[0; 200]$ ir mažėjanti intervale $[200; +\infty)$. Remdamiesi pakankama funkcijos ekstremumo egzistavimo taške sąlyga, darome išvadą, kad taške $Q = 200$ funkcija $\Pi(Q)$ įgyja maksimumą:

$$\Pi(200) = -\frac{1}{200} \cdot 200^2 + 2 \cdot 200 - 5 = 195; \quad C(200) = \frac{1}{200} \cdot 200^2 + 5 = 205.$$

III *etapas.* Šiltnamio savininkas didžiausią pelną turės, jeigu išaugins per sezoną 200 kg agurkų. Šis pelnas bus 195 Lt, o įvairios išlaidos agurkams išauginti — 205 Lt.

Atsakymas. 200 kg; 195 Lt, 205 Lt.

3 pavyzdys. *Kulinarė per dieną išverda* 400 *spurgų, kurių gamybos bendrosios išlaidos išreiškiamos funkcija* $C(Q) = \frac{1}{600\,000}Q^3 + 0{,}1Q$. *Kokiai spurgų rinkos kainai esant gaunamas didžiausias dienos pelnas? Kiek litų sudaro šis pelnas?*

Sprendimas. I *etapas.* Kulinarės spurgų virimo pelno funkcija yra

$$\begin{aligned}\Pi(Q) &= R(Q) - C(Q) = P \cdot Q - C(Q) = \\ &= P \cdot Q - \left(\frac{1}{600\,000}Q^3 + 0{,}1Q\right) = \\ &= -\frac{1}{600\,000}Q^3 - 0{,}1Q + P \cdot Q.\end{aligned}$$

II *etapas.* Kad funkcija $\Pi(Q)$ didžiausią reikšmę įgytų taške $Q = 400$, turi būti $\Pi'(400) = 0$:

$$\Pi'(Q) = -\frac{1}{200\,000}Q^2 - 0{,}1 + P,$$

$$0 = -\frac{400^2}{200\,000} - 0{,}1 + P, \qquad 0 = -0{,}8 - 0{,}1 + P, \qquad P = 0{,}9,$$

$$\Pi(400) = -\frac{400^3}{600\,000} - 0{,}1 \cdot 400 + 0{,}9 \cdot 400 = 213\frac{1}{3}\ \text{(Lt)}.$$

III *etapas.* Kai spurgos kaina yra 0,9 Lt, tai kulinarė gauna didžiausią dienos pelną, kuris lygus $213\frac{1}{3}$, t. y. $\approx 213{,}33$ Lt.

Atsakymas. 0,9 Lt; $213\frac{1}{3}$ Lt.

Šiais trimis pavyzdžiais pelno maksimizavimo problemą nagrinėjome tarę, kad firmos gaminamų prekių rinka yra konkurencinė. Įsitikinome, kad šiuo atveju pelnas yra pagamintos ir realizuotos produkcijos kiekio funkcija, t. y. $\Pi = \Pi(Q)$. Be to, dėl paprastumo nekreipėme dėmesio į kitas sąlygas, turinčias įtakos firmos veiklos ypatumams.

Panagrinėkime sunkesnį uždavinį. Tarkime, kad firmos veiklą sąlygoja du pagrindiniai veiksniai:

- produkcija realizuojama konkurencinėje prekių rinkoje;
- darbuotojai samdomi *konkurencinėje darbo rinkoje.*

Jau įsitikinome, kad veikianti konkurencijos sąlygomis firma negali turėti įtakos produkcijos rinkos kainai. Samdanti darbuotojus konkurencinėje darbo rinkoje ji negali daryti įtakos atlyginimui (darbo kainai) ir yra priversta mokėti jiems tiek, koks atlyginimas yra susiklostęs konkurencinėje darbo rinkoje.

Pelno maksimizavimo uždavinys šiuo atveju sprendžiamas taip pat pagal ankstesnę schemą. Skirtumas tik tas, kad dabar pagaminamos produkcijos kiekis sąlygojamas darbuotojų, dirbančių firmoje, skaičiumi L (*Labor*), t. y. $Q = Q(L)$. Tarę, kad firmos kaštus lemia tiktai darbuotojų darbo užmokesčio išlaidos, gauname $C = C(L)$. Vadinasi, firmos pelnas yra darbuotojų skaičiaus funkcija, t. y.

$$\Pi(L) = P \cdot Q(L) - C(L).$$

Panagrinėkime veikiančios tokiomis sąlygomis firmos optimalaus elgesio ypatumus konkrečiais pavyzdžiais.

4 pavyzdys. *Sodininkas samdo žmones slyvoms skinti. Kiekvieną dieną nuskintų ir realizuotų* Q (kg) *vaisių kiekis priklauso nuo jas skynusių sode žmonių skaičiaus* L *ir yra išreiškiamas funkcija* $Q(L) = -\frac{1}{3}L^3 + 6L^2$. *Kiekvienam samdomam žmogui sodininkas moka* 40 Lt *per dieną. Priskintas slyvas sodininkas parduoda konkurencinėje rinkoje po* 2 Lt *už kilogramą. Jeigu žmonės yra samdomi konkurencinėje darbo rinkoje, tai kiek:*

a) *jų reikia pasamdyti, kad sodininkas gautų didžiausią dienos pelną ir koks yra šis pelnas litais;*

b) *kilogramų slyvų turi priskinti pasamdyti žmonės, kad sodininko dienos pelnas būtų didžiausias;*

c) *reikės jų pasamdyti slyvų rinkos kainai sumažėjus* 0,5 Lt, *kad sodininko dienos pelnas būtų didžiausias?*

Sprendimas. a) I *etapas.* Šiame uždavinyje visus sodininko slyvų skynimo ir realizavimo kaštus lemia samdomųjų darbo užmokestis, todėl ši pinigų suma apskaičiuojama vienam žmogui sumokamų per dieną litų skaičių padauginus iš samdomųjų skaičiaus. Taigi $C(L) = 40L$. Vadinasi, sodininko dienos pelnas išreiškiamas funkcija

$$\Pi(L) = P \cdot Q(L) - C(L) = 2\Big(-\frac{1}{3}L^3 + 6L^2\Big) - 40 \cdot L = -\frac{2}{3}L^3 + 12L^2 - 40L.$$

II *etapas.* Tiriame funkciją $\Pi(L) = -\frac{2}{3}L^3 + 12L^2 - 40L$ ir randame didžiausią jos reikšmę intervale $[0; +\infty)$:

$$\Pi'(L) = -2L^2 + 24L - 40, \qquad -2L^2 + 24L - 40 = 0, \qquad L^2 - 12L + 20 = 0,$$
$$L_1 = 2 \in [0; +\infty) \quad \text{ir} \quad L_2 = 10 \in [0; +\infty).$$

Kadangi, pavyzdžiui, $\Pi'(1) = -18 < 0$, $\Pi'(3) = 14 > 0$, $\Pi'(11) = -18 < 0$, tai $L = 2$ yra funkcijos $\Pi(L)$ minimumo taškas, o $L = 10$ — maksimumo taškas.

$$\Pi(10) = -\frac{2}{3} \cdot 10^3 + 12 \cdot 10^2 - 40 \cdot 10 = 133\frac{1}{3}.$$

III *etapas.* a) Didžiausias sodininko dienos pelnas yra $133\frac{1}{3}$ Lt, kai jis samdo 10 žmonių.

b) Didžiausias sodininko dienos pelnas yra $133\frac{1}{3}$ Lt, jeigu pasamdyti 10 žmonių priskina ir realizuoja $Q(10) = -\frac{1}{3} \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 = 226\frac{2}{3}$ (kg) slyvų.

c) Analogiškai punktui a). Sodininko dienos pelno funkcija yra

$$\Pi_1(L) = P_1 \cdot Q(L) - C(L) = (2 - 0{,}5) \cdot \left(-\frac{1}{3}L^3 + 6L^2\right) - 40L = -0{,}5L^3 + 9L - 40L.$$

Tiriame funkciją $\Pi_1(L)$ intervale $[0; +\infty)$ ir randame jos didžiausią reikšmę:

$$\Pi_1'(L) = -1{,}5L^2 + 18L - 40.$$
$$-15L^2 + 18L - 40 = 0, \qquad 3L^2 - 36L + 80 = 0,$$
$$L_1 = \frac{2(9 - \sqrt{21})}{3} \approx 3, \qquad \frac{2(9 - \sqrt{21})}{3} \in [0; +\infty),$$
$$L_2 = \frac{2(9 + \sqrt{21})}{3} \approx 9, \qquad \frac{2(9 + \sqrt{21})}{3} \in [0; +\infty).$$

Kadangi, pavyzdžiui, $\Pi_1'(2) = -16 < 0$, $\Pi_1'(4) = 8 > 0$, $\Pi_1'(10) = -10 < 0$, tai $L_1 = \frac{2(9-\sqrt{21})}{3}$ yra funkcijos $\Pi_1(L)$ minimumo taškas, o $L_2 = \frac{2(9+\sqrt{21})}{3}$ — maksimumo taškas. Praktiškai $L_2 = 9$. Vadinasi, slyvų rinkos kainai esant 1,5 Lt, sodininkui ekonomiškiausia samdyti 9 žmones.

Atsakymas. a) 10 žmonių, $133\frac{1}{3}$ Lt; b) $226\frac{2}{3}$ kg; c) 9 žmonės.

Panagrinėkime, kaip rasti optimalią firmos produkcijos gamybos ir realizavimo apimtį, kai firma yra tam tikro produkto *gamybos monopolininkė*. Monopolinės rinkos *svarbiausi požymiai yra šie*:

- egzistuoja vienintelis pardavėjas rinkoje;
- parduodama produkcija yra unikali (nėra analogiškų prekių);
- yra aukšti ekonominiai barjerai patekti į rinką.

Čia svarbiausia yra tai, kad firma monopolininkė turi galimybę nustatyti savo produkcijos *monopolinę kainą*. Todėl yra tam tikra viso prekės kiekio ir to kiekio, kuris gali būti realizuotas, priklausomybė. Ji išreiškiama prekės, kurią gamina monopolininkas, *paklausos funkcija* $P = P(Q)$. Monopolininko bendrųjų įplaukų funkcija yra: $R(Q) = P(Q) \cdot Q$. Todėl gauname $\Pi(Q) = P(Q) \cdot Q - C(Q)$.

Panagrinėkime porą pavyzdžių, kaip nustatoma firmos monopolininkės optimali strategija.

5 pavyzdys. *Vienintelė pakelės kavinė garsėja ypatingais kepsniais ir geru svečių aptarnavimu. Kavinės dienos kaštai (litais) priklauso nuo iškepamų ir parduodamų kepsnių kiekio Q ir yra išreiškiami funkcija $C(Q) = 0{,}03Q^2 + 50$. Dienos įplaukos (litais) išreiškiamos funkcija $R(Q) = 8Q - 0{,}01Q^2$.*

a) *Kiek kepsnių per dieną turi iškepti ir parduoti kavinė, kad gautų didžiausią pelną?*

b) *Kiek litų sudaro didžiausias kavinės dienos pelnas?*

c) *Kokia yra vieno kepsnio kaina, kai kavinės pelnas per dieną yra didžiausias?*

Sprendimas. a) I *etapas.* Kavinės dienos pelnas išreiškiamas funkcija

$$\Pi(Q) = R(Q) - C(Q) = 8Q - 0{,}01Q^2 - (0{,}03Q^2 + 50) = -0{,}04Q^2 + 8Q - 50.$$

II *etapas.* Kvadratinė funkcija $\Pi(Q) = -0{,}04Q^2 + 8Q - 50$ didžiausią reikšmę įgyja, kai $Q = 100$.

III *etapas*. a) Kavinė turi iškepti ir parduoti 100 kepsnių, kad dienos pelnas būtų didžiausias.

b) Kavinės didžiausias pelnas per dieną yra $\Pi(100) = -0{,}04 \cdot 100^2 + 8 \cdot 100 - 50 = 350\,(\mathrm{Lt})$.

c) Kadangi $R(Q) = P(Q) \cdot Q = P \cdot Q$, tai vieno kepsnio kaina lygi $P(100) = 8 - 0{,}01 \cdot 100 = 8 - 1 = 7\,(\mathrm{Lt})$.

Atsakymas. a) 100 kepsnių; b) 350 Lt; c) 7 Lt.

6 pavyzdys. *Konditerė (monopolininkė) kepa labai skanius ir paklausius šakočius. Jų paklausa išreiškiama lygtimi $Q + 10P = 120$; čia P yra vieno šakočio kaina litais, Q — skaičius iškeptų ir parduotų per dieną šakočių. Šakočių kepimo bendrieji kaštai yra išreiškiami funkcija $C(Q) = 0{,}3Q^2 + 4Q + 5$.*

a) *Kokia turi būti vieno šakočio kaina, kad konditerės dienos pelnas būtų didžiausias?*

b) *Kiek litų pasikeistų konditerės didžiausias dienos pelnas, jeigu šakočių paklausa būtų išreiškiama lygtimi $Q + 10P = 160$?*

Sprendimas. a) I *etapas*. Konditerės dienos pelno funkcija yra

$$\Pi(Q) = R(Q) - C(Q) = P(Q) \cdot Q - C(Q);$$

čia $P = P(Q)$ — šakočių paklausos funkcija. Priklausomybę $P = P(Q)$ randame iš lygties $Q + 10P = 120$:

$$P(Q) = \frac{120 - Q}{10} = 12 - 0{,}1Q.$$

Vadinasi, $R(Q) = (12 - 0{,}1Q) \cdot Q = -0{,}1Q^2 + 12Q$. Todėl

$$\Pi(Q) = -0{,}1Q^2 + 12Q - (0{,}3Q^2 + 4Q + 5) = -0{,}4Q^2 + 8Q - 5.$$

II *etapas*. Funkcija $\Pi(Q) = -0{,}4Q^2 + 8Q - 5$ didžiausią reikšmę intervale $[0; +\infty)$ įgyja, kai $Q = 10$. Šiai Q reikšmei atitinkamą P reikšmę randame iš lygties $Q + 10P = 120$:

$$P = 12 - 0{,}1 \cdot 10 = 11, \qquad \Pi(10) = -0{,}4 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 - 5 = 35.$$

III *etapas*. Didžiausias konditerės pelnas per dieną yra 35 Lt ir jis gaunamas, kai šakočio kaina yra 11 Lt.

b) Analogiškai spręsdami gauname $P(Q) = 16 - 0{,}1Q$, todėl

$$\Pi_1(Q) = (16 - 0{,}1Q) \cdot Q - (0{,}3Q^2 + 4Q + 5) = -0{,}4Q^2 + 12Q - 5.$$

Funkcija $\Pi_1(Q)$ didžiausią reikšmę intervale $[0; +\infty)$ įgyja, kai $Q = 15$. Šiuo atveju $\Pi_1(15) = -0{,}4 \cdot 15^2 + 12 \cdot 15 - 5 = 85\,(\mathrm{Lt})$.

Vadinasi, kai konditerės monopolininkės iškeptų šakočių paklausa išreiškiama lygtimi $Q + 10P = 160$, o jų gamybos kaštai — funkcija $C(Q) = 0{,}3Q^2 + 4Q + 5$, tai didžiausias dienos pelnas padidėja $85 - 35 = 50\,(\mathrm{Lt})$ vieno šakočio kainai padidėjus $16 - 0{,}1 \cdot 15 - 11 = 3{,}5\,(\mathrm{Lt})$.

Atsakymas. a) 11 Lt; b) pelnas padidėtų 50 Lt.

Išnagrinėti pavyzdžiai įtikina, kad išvestines galima taikyti sprendžiant įvairių sričių ekonominio turinio problemas, susijusias su gamybos sąlygų ir parametrų, charakterizuojančių firmos veiklą, optimizavimu.

Uždaviniai savarankiškam sprendimui

1. Kulinarijos cechas kepa picas, kurių kaštai išreiškiami funkcija $C(Q) = 2{,}5Q^2 + 0{,}(3)Q^3$; čia Q — picų skaičius tūkst. vnt. Žinoma, kad cechas per savaitę gali iškepti ne daugiau kaip 1,5 tūkst. picų. Kiek picų per savaitę turi iškepti kulinarijos cechas, kad jo pelnas būtų didžiausias, jeigu picos konkurencinės rinkos kaina lygi 6 Lt. Kiek litų sudaro šis pelnas?

Atsakymas. 1000 picų; $3166\frac{2}{3}$ Lt.

2. Mezgykla neria megztinius ir realizuoja juos konkurencinėje rinkoje. Megztinio pagaminimo kaštai (litais) yra išreiškiami funkcija $C(Q) = \frac{1}{2}Q^2 + 4$. Kokia yra megztinio rinkos kaina, jeigu žinoma, kad didžiausias pelnas gaunamas realizavus 40 megztinių per savaitę. Raskite savaitės pelną per savaitę.

Atsakymas. 40 Lt; 796 Lt.

3. Virtuvė verda didžkukulius, kurių gamybos kaštai (litais) išreiškiami funkcija $C(Q) = \frac{Q^4}{240\,000}$. Per dieną virtuvė gali išvirti iki 100 didžkukulių. Koks gali būti didžiausias virtuvės pelnas, jeigu vieno didžkukulio rinkos kaina yra

a) 3,6 Lt; b) $2\frac{1}{12}$ Lt?

Atsakymas. a) 162 Lt; b) $78\frac{1}{8}$ Lt.

4. Pomidorų kilogramo rinkos kaina yra 3 Lt. Jų auginimo šiltadaržyje išlaidos (litais) priklausomai nuo kiekio (kg) išreiškiamos funkcija $C(Q) = \frac{1}{50}Q^2 + 10$.

a) Kiek kilogramų pomidorų turi išauginti šiltadaržio šeimininkas per sezoną, kad pelnas būtų didžiausias?

b) Kiek litų pasikeistų didžiausias pelnas, jeigu pomidorų kilogramo rinkos kaina būtų 3,5 Lt?

Atsakymas. a) 75 kg; b) padidėtų $\approx 40{,}63$ Lt.

5. Svogūnų kilogramo rinkos kaina yra 1,2 Lt. Jų auginimo išlaidos (litais) priklausomai nuo išauginamo ir pardavimo kiekio (kg), išreiškiamos funkcija $C(Q) = \frac{1}{500}Q^2 + 3$. Kiek litų pasikeistų didžiausias pelnas, jeigu išlaidas išreiškianti funkcija būtų

a) $C_1(Q) = \frac{1}{600}Q^2 + 3$; b) $C_2(Q) = \frac{1}{400}Q^2 + 3$?

Atsakymas. a) padidėtų 36 Lt; b) sumažėtų 36 Lt.

6. Daržininkas samdo žmones braškėms skinti. Kiekvieną savaitę realizuojamų uogų kiekis (kg) priklauso nuo jas skinančių žmonių skaičiaus L: $Q(L) = -4L^2 + 250L$. Kiekvienam braškių skynėjui daržininkas per savaitę moka po 150 Lt. Priskintas braškes jis parduoda konkurencinėje rinkoje po 3 Lt už kilogramą. Jeigu daržininkas samdo žmones konkurencinėje darbo rinkoje, tai kiek jų reikia pasamdyti, kad jo pelnas būtų didžiausias. Kiek kilogramų braškių priskinama ir realizuojama per savaitę?

Atsakymas. 25 žmonės; 3750 kg.

7. Sodininkas samdo žmones serbentams skinti. Kiekvieną dieną nuskintų ir parduotų uogų kiekis (kg) priklausomai nuo jas skinančių žmonių skaičiaus L išreiškiamas funkcija $Q(L) = -2L^2 + 80L$. Kiekvienam samdytam žmogui sodininkas moka po 20 Lt per dieną. Priskintas uogas sodininkas parduoda konkurencinėje rinkoje po 0,5 Lt už kilogramą. Jeigu sodininkas samdo žmones konkurencinėje darbo rinkoje, tai kiek:

a) jų reikia pasamdyti, kad sodininko gautas pelnas būtų didžiausias, ir kokia yra šio pelno suma;

b) serbentų (kg) priskinama kasdien?

Atsakymas. a) 10 žmonių; 100 Lt; b) 600 kg.

8. Batsiuviai vieninteliai mieste siuva nestandartinių dydžių vyriškus batus. Batsiuvių bendrieji kaštai (litais) per mėnesį išreiškiami pasiūtų batų porų kiekio Q funkcija $C(Q) = Q^2 + 1500$, o įplaukos — $R(Q) = 200Q - Q^2$.

a) Kiek porų batų reikia pasiūti per mėnesį, kad batsiuvių pelnas būtų didžiausias?

b) Kiek litų sudaro didžiausias batsiuvių mėnesio pelnas?

c) Kokia yra batų poros kaina, kai batsiuvių pelnas per mėnesį yra didžiausias?

Atsakymas. a) 50 porų batų; b) 3500 Lt; c) 150 Lt.

9. Picerija kepa ypatingas picas ir todėl yra šios rūšies picų monopolininkė mieste. Picų paklausa išreiškiama lygtimi $Q + 20P = 300$; čia P yra vienos picos kaina litais, o Q — iškeptų per dieną picų skaičius. Picerijos bendrųjų išlaidų suma išreiškiama funkcija $C(Q) = 0{,}02Q^2 + Q + 180$.

a) Apskaičiuokite, kokia turi būti vienos picos kaina, kad picerijos dienos pelnas būtų didžiausias.

b) Kiek litų sudaro didžiausias picerijos dienos pelnas?

Atsakymas. a) 10 Lt; b) 520 Lt.

10. Tekintojas monopolininkas gamina unikalias detales, kurių paklausa išreiškiama lygtimi $Q^2 + P = 400$; čia P yra vienos detalės kaina litais, o Q — pagaminamų per mėnesį detalių kiekis. Bendrųjų kaštų (litais) detalėms pagaminti suma išreiškiama funkcija $C(Q) = -Q^3 + 10Q^2 + 100Q + 1000$. Kokį didžiausią mėnesio pelną gali turėti tekintojas ir kokia tuomet turi būti detalės kaina?

Atsakymas. 1250 Lt; 175 Lt.

IŠ DĖDĖS GENIAUS STRAZDO UŽRAŠŲ

1. Kaip tarp skaitmenų sudėti aritmetinių veiksmų ženklus ir skliaustus, kad gautume teisingas lygybes:

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9 = 9;$$
$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1 = 9?$$

Atsakymas. $(1 + 2 - 3) \cdot 45678 + 9 = 9$;
$1234 - 5678 + 9 + 8765 - 4321 = 9$.

2. Oilerio trinario x^2+x+41 reikšmės, kai $x = 0, 1, \ldots, 40$, yra pirminiai skaičiai. Geniaus Strazdo dvinaris $2x^2 + 29$ įgyja reikšmes, kurios yra pirminiai skaičiai, kai $x = 0, 1, 2, \ldots, 28$.

3. Valdas Adamkus Lietuvos prezidentu buvo išrinktas 1998 sausio 4 d. Užrašykime šią datą kitaip:

$$199814 = 222^2 + 223^2 + 224^2 + 225^2.$$