$\alpha + \omega$, 2003, Nr. 1, 43–49

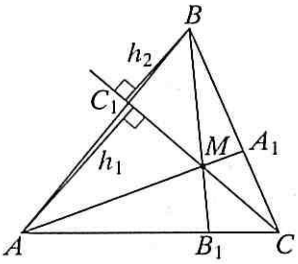
Čevos ir Menelajo teoremos

Edmundas Mazėtis
edmundas@vpu.lt

Straipsnyje įrodomos Čevos bei Menelajo teoremos ir nagrinėjamos jų išvados.

Čevos teorema

Iš mokyklinės geometrijos kurso žinoma, kad trikampio pusiaukraštinės (taip pat pusiaukampinės, aukštinės) susikerta viename taške. Šie faktai yra vienos gražios teoremos atskiri atvejai. Minėtą teoremą 1678 metais įrodė italų matematikas ir inžinierius Džiovani Čeva (*Giovanni Ceva*, 1648–1734) savo knygoje „Mokymas apie susikertančias tieses“.



1 pav.

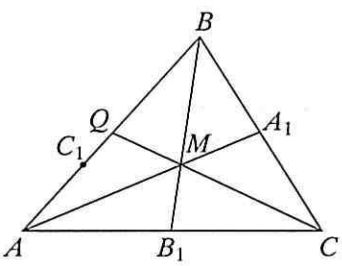
1 teorema (Čevos teorema). *Trikampio ABC kraštinėse BC, AC ir AB atitinkamai pažymėti taškai A_1, B_1, C_1 ir $BA_1 : A_1C = \alpha$, $CB_1 : B_1A = \beta$, $AC_1 : C_1B = \gamma$. Tiesės AA_1, BB_1, CC_1 susikerta viename taške tada ir tik tada, kai $\alpha\beta\gamma = 1$.*

Įrodymas. Sakykime, kad atkarpos AA_1, BB_1, CC_1 kertasi taške M. Pažymėkime trikampių AMC, CMB ir AMB plotus atitinkamai S_1, S_2 ir S_3, o atstumus nuo taškų A ir B iki tiesės CM — atitinkamai h_1 ir h_2 (1 pav.).

Trikampių AMC ir CMB kraštinė CM bendra, todėl jų plotų santykis lygus aukštinių h_1 ir h_2, nubrėžtų į tą kraštinę, ilgių santykiui. Todėl $\frac{S_1}{S_2} = \frac{h_1}{h_2}$.

Iš panašiųjų trikampių išplaukia, kad $\alpha = \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{h_1}{h_2}$. Taigi $\alpha = \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{S_1}{S_2}$. Analogiškai gauname, jog $\beta = \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{S_2}{S_3}$, $\gamma = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{S_2}{S_1}$. Tuomet $\alpha\beta\gamma = 1$.

Dabar tarkime, kad lygybė $\alpha\beta\gamma = 1$ yra teisinga, ir įrodykime, kad tiesės AA_1, BB_1, CC_1 susikerta viename taške. Sakykime, tiesės AA_1 ir BB_1 kertasi taške M, o tiesė CM kerta trikampio kraštinę AB taške Q (2 pav.).



2 pav.

Kadangi tiesės AA_1, BB_1 ir CQ kertasi viename taške, tai teisinga lygybė $\alpha\beta \cdot \frac{AQ}{QB} = 1$. Iš šios lygybės ir sąlygos $\alpha\beta\gamma = 1$ išplaukia, kad $\gamma = \frac{AQ}{QB}$. Bet atkarpoje AB yra tik vienas taškas, kuris dalija ją tokiu santykiu, todėl iš lygybės $\frac{AQ}{QB} = \frac{AC_1}{C_1B}$ gauname, kad taškai C_1 ir Q sutampa. Taigi tiesė CC_1 eina per tašką M. Teorema įrodyta.

Gautąją lygybę $\alpha\beta\gamma = 1$ užrašome taip: $\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1$. Iš šio užrašo matyti, kad norint teisingai surašyti šioje formulėje santykius, reikia judėti trikampio kontūru nuo pasirinktos viršūnės (mūsų atveju viršūnės B) prie kraštinėje esančio taško (A_1), po to prie kitos viršūnės (C) ir toliau analogiškai.

Čevos teoremos išvados

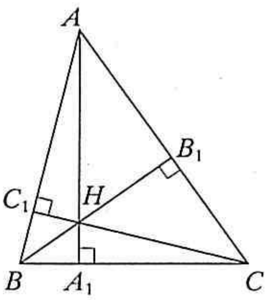
Dabar pateiksime keletą Čevos teoremos išvadų.

1 išvada. *Trikampio pusiaukraštinės kertasi viename taške.*

Įrodymas. Jei AA_1, BB_1, CC_1 yra trikampio ABC pusiaukraštinės, tai $\alpha = \beta = \gamma = 1$ ir $\alpha\beta\gamma = 1$. Iš Čevos teoremos išplaukia, kad tiesės AA_1, BB_1, CC_1 kertasi viename taške. Trikampio pusiaukraštinių sankirtos taškas vadinamas trikampio sunkio centru.

2 išvada. *Trikampio pusiaukampinės susikerta viename taške (į trikampį įbrėžto apskritimo centre).*

Įrodymas. Jei atkarpos AA_1, BB_1, CC_1 yra trikampio ABC pusiaukampinės, tai pagal pusiaukampinių savybę $\alpha = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{AB}{AC}$, $\beta = \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{BC}{BA}$, $\gamma = \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{CA}{CB}$, iš čia $\alpha\beta\gamma = 1$.



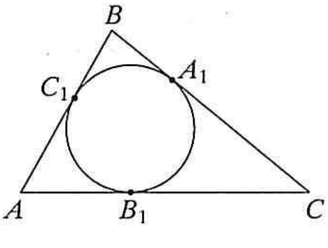
3 pav.

3 išvada. *Trikampio aukštinės susikerta viename taške.*

Įrodymas. Sakykime, kad atkarpa AA_1 yra trikampio ABC aukštinė (3 pav.).

Iš stačiųjų trikampių ABA_1 ir ACA_1 gauname, kad $BA_1 = AA_1 \operatorname{ctg} \angle B$, $A_1C = AA_1 \operatorname{ctg} \angle C$. Tuomet $\alpha = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{\operatorname{ctg} \angle B}{\operatorname{ctg} \angle C}$. Analogiškai: $\beta = \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{\operatorname{ctg} \angle C}{\operatorname{ctg} \angle A}$, $\gamma = \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{\operatorname{ctg} \angle A}{\operatorname{ctg} \angle B}$. Taigi $\alpha\beta\gamma = 1$ ir pagal Čevos teoremą trikampio aukštinės susikerta viename taške H, kuris vadinamas trikampio ortocentru.

4 išvada. *Sakykime, kad į trikampį ABC įbrėžtas apskritimas trikampio kraštines BC, AC ir AB liečia taškuose A_1, B_1, C_1. Tuomet tiesės AA_1, BB_1 ir CC_1 susikerta viename taške, kuris vadinamas trikampio Žergono tašku (Joseph Diaz Gergonne, 1771–1859, prancūzų matematikas).*



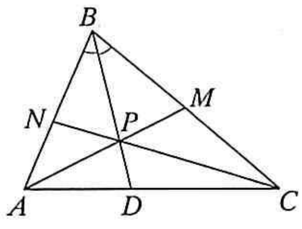
4 pav.

Įrodymas. Pažymėkime trikampio ABC kraštinių BC, AC ir AB ilgius a, b, c. Tuomet $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ yra jo pusperimetris. Pagal apskritimo liestinių, nubrėžtų iš vieno taško, savybę $AB_1 = AC_1 = x$, $BC_1 = BA_1 = y$, $CB_1 = CA_1 = z$ (4 pav.).

Tuomet $2(x+y+z) = 2p$, $x+y=c$, $y+z=a$, $x+z=b$. Iš čia $x = p-a$, $y = p-b$, $z = p-c$ ir $\alpha = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{p-b}{p-c}$, $\beta = \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{p-c}{p-a}$, $\gamma = \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{p-a}{p-b}$. Kadangi $\alpha\beta\gamma = 1$, tai tiesės AA_1, BB_1 ir CC_1 susikerta viename taške.

Čevos teoremos taikymas

Išnagrinėkime keletą uždavinių, kurių sprendimus gerokai palengvina Čevos teorema.



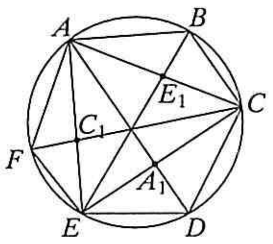
5 pav.

1 pavyzdys. *Trikampio ABC kraštinės lygios a, b, c; pusiaukraštinė AM kerta pusiaukampinę BD taške P. Raskime, į kokio ilgio atkarpas tiesė CP dalija kraštinę AB. Sakykime, kad tiesė CP kerta kraštinę AB taške N* (5 pav.).

Sprendimas. Tiesės AM, BD ir CN eina per vieną tašką P, todėl pritaikę Čevos teoremą gauname $\frac{AD}{DC} \cdot \frac{CM}{BM} \cdot \frac{BN}{NA} = 1$. Bet $AD : DC = c : a$, $CM : MB = 1$, todėl $\frac{BN}{NA} = \frac{a}{c}$. Taigi:

$$AN = \frac{c^2}{a+c}, \quad BN = \frac{ac}{a+c}.$$

2 pavyzdys. *Įbrėžto į apskritimą šešiakampio $ABCDEF$ įstrižainės AD, BE ir CF kertasi viename taške tada ir tik tada, kai $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA$.*

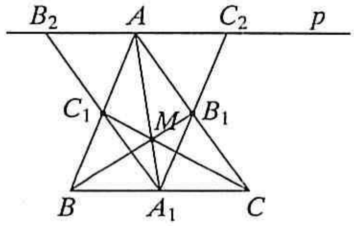


6 pav.

Įrodymas. Sakykime, kad tiesė AD kerta trikampio ACE kraštinę EC taške A_1, tiesė CF kerta kraštinę AE taške C_1, o tiesė EB kerta kraštinę AC taške E_1 (6 pav.).

Tiesės AD, BE ir CF kertasi viename taške tada ir tik tada, kai $\frac{EA_1}{A_1C} \cdot \frac{CE_1}{E_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1E} = 1$. Trikampiams AA_1E ir AA_1C taikome sinusų teoremą ir gauname, kad $\frac{EA_1}{\sin\angle EAD} = \frac{AE}{\sin\angle EA_1A}$ ir $\frac{A_1C}{\sin\angle CAD} = \frac{AC}{\sin(180^\circ - \angle EA_1A)} = \frac{AC}{\sin\angle EA_1A}$. Iš čia $\frac{EA_1}{A_1C} = \frac{AE\cdot\sin\angle EAD}{AC\cdot\sin\angle CAD}$. Bet pagal sinusų teoremą $\frac{\sin\angle EAD}{\sin\angle CAD} = \frac{ED}{CD}$, todėl $\frac{EA_1}{A_1C} = \frac{AE\cdot ED}{AC\cdot CD}$. Analogiškai gauname, kad $\frac{CE_1}{E_1A} = \frac{CE\cdot CB}{AE\cdot AB}$, $\frac{AC_1}{C_1E} = \frac{AC\cdot AF}{EC\cdot FE}$. Tuomet lygybė $\frac{EA_1}{A_1C} \cdot \frac{CE_1}{E_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1E} = 1$ tampa tokia $\frac{ED\cdot CB\cdot AF}{CD\cdot AB\cdot FE} = 1$. Tai ir reikėjo įrodyti.

3 pavyzdys. *Trikampio ABC kraštinėse BC, AC ir AB pažymėti taškai A_1, B_1, C_1 taip, kad tiesės AA_1, BB_1, CC_1 eitų per vieną tašką. Tiesė p eina per trikampio viršūnę A ir lygiagreti su tiese BC. Tiesės A_1B_1 ir A_1C_1 kerta tiesę p taškuose C_2 ir B_2. Įrodykime, kad atkarpos AB_2 ir AC_2 yra lygios* (7 pav.).

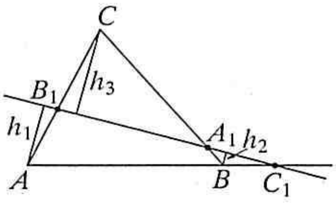


7 pav.

Įrodymas. Kadangi atkarpos AA_1, BB_1, CC_1 eina per vieną tašką M, tai pagal Čevos teoremą $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$. Trikampiai AC_1B_2 ir BC_1A_1 panašūs, todėl $\frac{AB_2}{A_1B} = \frac{AC_1}{BC_1}$, t. y. $AB_2 = \frac{AC_1\cdot A_1B}{BC_1}$. Iš trikampių AB_1C_2 ir CB_1A_1 panašumo gauname, kad $\frac{AC_2}{CA_1} = \frac{B_1A}{CB_1}$ ir $AC_2 = \frac{CA_1\cdot B_1A}{B_1C}$. Tuomet $\frac{AB_2}{AC_2} = \frac{AC_1\cdot A_1B\cdot B_1C}{BC_1\cdot CA_1\cdot B_1A} = 1$, t. y. $AB_2 = AC_2$.

Menelajo teorema

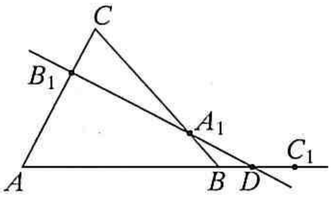
Dabar įrodysime kitą svarbią ir gražią teoremą, kurią I amžiuje graikų matematikas Menelajas Aleksandrietis naudojo savo knygoje „Sferika" išvesdamas sferinių trikampių triginometrijos formules.



8 pav.

2 teorema (Menelajo teorema). *Sakykime, kad trikampio ABC kraštinėse BC ir AC pažymėti taškai A_1 ir B_1, o kraštinės AB tęsinyje — taškas C_1; be to, $\alpha = BA_1 : A_1C_1$, $\beta = CB_1 : B_1A$, $\gamma = AC_1 : C_1B$. Taškai A_1, B_1, C_1 yra vienoje tiesėje tada ir tik tada, kai $\alpha\beta\gamma = 1$* (8 pav.).

Įrodymas. Sakykime, kad taškai A_1, B_1, C_1 yra vienoje tiesėje. Nubrėžkime iš trikampio viršūnių A, B, C statmenis h_1, h_2 ir h_3 į šią tiesę. Iš trikampių panašumo išplaukia, jog $\alpha = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{h_2}{h_3}$, $\beta = \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{h_3}{h_1}$, $\gamma = \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{h_1}{h_2}$. Tuomet $\alpha\beta\gamma = 1$.



9 pav.

Atvirkščiai, sakykime, kad $\alpha\beta\gamma = 1$, o tiesė A_1B_1 kerta tiesę AB taške D (9 pav.).

Kadangi taškai A_1, B_1 ir D yra vienoje tiesėje, tai, kaip jau įrodėme, $\alpha \cdot \beta \cdot \frac{AD}{DB} = 1$. Kadangi $\alpha\beta\gamma = 1$, tai $\frac{AD}{DB} = \gamma$. Bet trikampio kraštinės AB tęsinyje yra tik vienas toks taškas C_1, kad $\frac{AC_1}{C_1B} = \gamma$. Taigi taškai C_1 ir D sutampa ir trys taškai A_1, B_1, C_1 yra vienoje tiesėje. Teorema įrodyta.

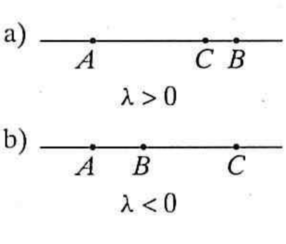
Norėdami teisingai surašyti raides Menelajo teoremos sąlygoje nurodytoje lygybėje $\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1$, naudojamės ta pačia taisykle, kaip ir Čevos teoremos atveju.

Trijų tiesės taškų paprastasis santykis

Čevos ir Menelajo teoremas galima suformuluoti ir kiek kitaip, taikant trijų tiesės taškų paprastojo santykio sąvoką:

Jei taškai A, B, C yra vienoje tiesėje, tai visuomet egzistuoja toks skaičius λ, kad $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$.

Tas skaičius vadinamas trijų tiesės taškų A, B, C paprastuoju santykiu ir žymimas $\lambda = (AB, C)$. Jei taškas C yra atkarpoje AB, tai $\lambda > 0$ ir $\lambda = \frac{AC}{CB}$ (10 pav., a), jei taškas C nėra atkarpoje AB, tai $\lambda < 0$ ir $\lambda = -\frac{AC}{CB}$ (10 pav., b).



10 pav.

Dabar Čevos ir Menelajo teoremas galima suformuluoti taip:

Sakykime, kad trikampio ABC kraštinėse BC, AC ir AB pažymėti taškai A_1, B_1, C_1 ir $\alpha = (BC, A_1)$, $\beta = (AC, B_1)$, $\gamma = (AB, C_1)$. Tuomet:

a) tiesės AA_1, BB_1 ir CC_1 eina per vieną tašką tada ir tik tada, kai $\alpha\beta\gamma = 1$ (Čevos teorema);

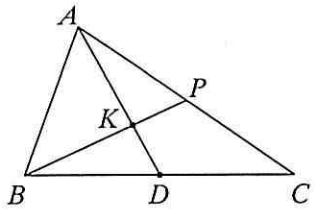
b) taškai A_1, B_1, C_1 yra vienoje tiesėje tada ir tik tada, kai $\alpha\beta\gamma = -1$ (Menelajo teorema).

Teoremų įrodymą šiuo atveju skaitytojas ras straipsnyje „Afinioji geometrija" (*Alfa plius omega*, 2002, Nr. 1).

Menelajo teoremos taikymai

Išspręskime keletą uždavinių, kuriuose pravartu remtis Menelajo teorema.

4 pavyzdys. *Trikampio ABC pusiaukraštinėje AD pažymėtas toks taškas K, kad $AK : KD = 3 : 1$. Tiesė BK dalija trikampį ABC į du trikampius. Raskime jų plotų santykį.*



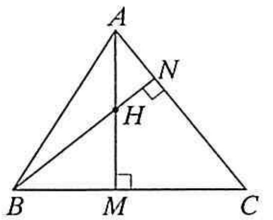
11 pav.

Sprendimas. Sakykime, kad tiesė BK kerta trikampio kraštinę AC taške P (11 pav.).

Aišku, kad $S_{\triangle ABP} : S_{\triangle BPC} = AP : PC$. Taikome trikampiui ADC ir trims taškams B, K, P, esantiems vienoje tiesėje, Menelajo teoremą: $\frac{AK}{KD} \cdot \frac{DB}{BC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1$. Kadangi $\frac{AK}{KD} = 3$, $\frac{DB}{BC} = \frac{1}{2}$, tai $3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{CP}{PA} = 1$ ir $\frac{CP}{PA} = \frac{2}{3}$. Taigi $S_{\triangle ABP} : S_{\triangle BPC} = 3 : 2$.

Skaitytojai gali pabandyti šį uždavinį išspręsti kitais būdais (pvz., vektoriniu metodu arba taikydami Talio teoremą) ir pamatyti, kiek daug gelbsti Menelajo teorema.

5 pavyzdys. *Trikampio ABC ortocentras H dalija aukštinę AM pusiau. Įrodykime, kad teisinga lygybė* $\cos\angle A = \cos\angle B \cdot \cos\angle C$.



12 pav.

Įrodymas. Sakykime, kad BN yra kita trikampio aukštinė (12 pav.).

Trikampiui AMC ir trims tiesės taškams B, H ir N taikome Menelajo teoremą: $\frac{AH}{HM} \cdot \frac{MB}{BC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1$.

Kadangi $AH = HM$, tai $\frac{MB}{BC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1$. Kaip jau esame minėję, $BM = AM \operatorname{ctg}\angle B$, $MC = AM \operatorname{ctg}\angle C$, todėl $BC = AM(\operatorname{ctg}\angle B + \operatorname{ctg}\angle C)$ ir $\frac{MB}{BC} = \frac{\operatorname{ctg}\angle B}{\operatorname{ctg}\angle B + \operatorname{ctg}\angle C}$. Be to, $\frac{CN}{NA} = \frac{\operatorname{ctg}\angle C}{\operatorname{ctg}\angle A}$. Kadangi $\frac{BC}{MB} \cdot \frac{NA}{CN} = 1$, tai $\left(1 + \frac{\operatorname{ctg}\angle C}{\operatorname{ctg}\angle B}\right)\frac{\operatorname{ctg}\angle A}{\operatorname{ctg}\angle C} = 1$, arba $\frac{\operatorname{ctg}\angle A}{\operatorname{ctg}\angle B} + \frac{\operatorname{ctg}\angle A}{\operatorname{ctg}\angle C} = 1$.

Pertvarkę šią lygybę, gauname

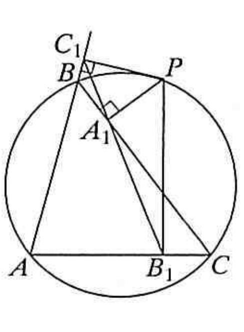
$$\operatorname{ctg}\angle A(\operatorname{ctg}\angle C + \operatorname{ctg}\angle B) = \operatorname{ctg}\angle B \operatorname{ctg}\angle C,$$

arba

$$\cos\angle A(\cos\angle B \sin\angle C + \cos\angle C \sin\angle B) = \cos\angle C \cos\angle B \sin\angle A.$$

Kadangi $\cos\angle B \cdot \sin\angle C + \cos\angle C \sin\angle B = \sin(\angle B + \angle C) = \sin(180^\circ - \angle A) = \sin\angle A$, tai, suprastinę iš $\sin\angle A$, gauname $\cos\angle A = \cos\angle B \cdot \cos\angle C$.

6 pavyzdys. *Apie trikampį ABC apibrėžtas apskritimas. Iš bet kurio to apskritimo taško P nubrėžti statmenys į trikampio kraštines. Įrodykime, kad šių statmenų pagrindai yra vienoje tiesėje.*



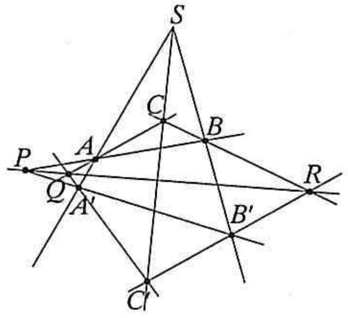
13 pav.

Įrodymas. Sakykime, $PA_1 \perp BC$, $PB_1 \perp AC$, $PC_1 \perp AB$ (13 pav.). Tuomet $BA_1 = BP\cos\angle PBC$, $A_1C = PC\cos\angle PCB$, $CB_1 = PC\cos\angle PCA$, $B_1A = PA\cos\angle PAC$, $AC_1 = AP\cos\angle PAB$, $BC_1 = PB\cos\angle PBC_1$. Todėl

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{\cos\angle PBC \cdot \cos\angle PCA \cdot \cos\angle PAB}{\cos\angle PCB \cdot \cos\angle PAC \cdot \cos\angle PBC_1}.$$

Beliko pastebėti, kad $\angle PAC = \angle PBC$, $\angle PAB = \angle PCB$, o $\angle PCA = 180° - \angle PBA = \angle PBC_1$. Taigi $\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1$ ir pagal Menelajo teoremą taškai A_1, B_1 ir C_1 yra vienoje tiesėje. Ši tiesė yra vadinama trikampio ABC Simsono (*Rober Simson*, 1687–1768, anglų matematikas) tiese, atitinkančia tašką P.

7 pavyzdys. *Sakykime, kad ABC ir $A'B'C'$ yra du trikampiai. Tiesės AA', BB' ir CC' susikerta viename taške S, o tiesės AB, BC ir AC kertasi atitinkamai su tiesėmis $A'B'$, $B'C'$ ir $A'C'$. Įrodykime, kad šių tiesių sankirtos taškai yra vienoje tiesėje.*



14 pav.

Įrodymas. Sakykime, kad tiesės AB ir $A'B'$ kertasi taške P, tiesės AC ir $A'C'$ — taške Q, o tiesės BC ir $B'C'$ — taške R (14 pav.).

Taikome Menelajo teoremą trikampiui SAB ir trims tiesės taškams P, A', B': $\frac{SA'}{A'A} \cdot \frac{AP}{PB} \cdot \frac{BB'}{B'S} = 1$. Analogiškai pritaikę Menelajo teoremą trikampiui SBC ir tiesės taškams B', R, C', gauname $\frac{SB'}{B'B} \cdot \frac{BR}{RC} \cdot \frac{CC'}{C'S} = 1$, o trikampiui SAC ir taškams A', C', Q — $\frac{SA'}{A'A} \cdot \frac{AQ}{QC} \cdot \frac{CC'}{C'S} = 1$, arba $\frac{A'A}{SA'} \cdot \frac{QC}{AQ} \cdot \frac{C'S}{CC'} = 1$. Sudauginę tris gautąsias lygybes, gauname

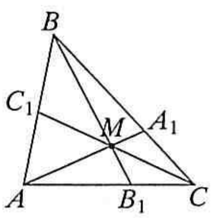
$$\frac{BR}{RC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AP}{PB} = 1.$$

Kadangi taškai P, Q ir R yra trikampio ABC kraštinių tęsiniuose ir tenkina Menelajo teoremą, tai jie yra vienoje tiesėje.

Įrodytasis teiginys geometrijoje žinomas kaip Dezargo teorema (*Gerard Desargues*, 1593–1662, prancūzų matematikas, vienas projektyvinės geometrijos kūrėjų). Ši teorema turi daugybę įdomių taikymų, bet apie juos gal kitą kartą.

Van Obelio teorema

Baigdami įrodysime van Obelio teoremą. Remsimės Čevos ir Menelajo teoremomis.



15 pav.

3 teorema (van Obelio teorema). *Trikampio ABC kraštinėse BC, AC, AB pažymėti taškai atitinkamai A_1, B_1, C_1 ir $AC_1 : C_1B = k$, $AB_1 : B_1C = l$. Tiesės AA_1, BB_1 ir CC_1 eina per vieną tašką M ir $AM : MA_1 = m$. Įrodykime, kad $m = k + l$* (15 pav.).

Įrodymas. Kadangi tiesės AA_1, BB_1 ir CC_1 kertasi viename taške M, tai pagal Čevos teoremą $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$, arba $k \cdot \frac{BA_1}{A_1C} = l$, t. y. $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{l}{k}$. Dabar trikampiui ABA_1 ir tiesės taškams C, M ir C_1 taikome Menelajo teoremą: $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BC}{CA_1} \cdot \frac{A_1M}{MA} = 1$. Kadangi $\frac{AC_1}{C_1B} = k$, $\frac{BC}{CA_1} = \frac{l+k}{k}$, $\frac{A_1M}{MA} = \frac{1}{m}$, tai $k \cdot \frac{l+k}{k} \cdot \frac{1}{m} = 1$. Iš čia $m = k + l$.

Uždaviniai

Štai keletas uždavinių, kurių sprendimą gali palengvinti Čevos ir Menelajo teoremos.

1. Įrodykite, kad tiesės, einančios per trikampio viršūnes ir dalijančios trikampio perimetrą pusiau, susikerta viename taške.
2. Trikampio ABC kraštinėse AB ir AC yra taškai K ir L, be to, $AK : KB = 3 : 2$, $AL : LC = 1 : 4$. Per tiesių BL ir KC sankirtos tašką P nubrėžta tiesė AP. Kokiu santykiu ši tiesė dalija atkarpą BC?
3. Trikampio ABC kraštinėse AB ir AC yra taškai M ir N, be to, $AM : MB = CN : NA = 1 : 2$. Kokiais santykiais atkarpų BN ir CM sankirtos taškas dalija šias atkarpas?
4. Trikampio ABC pusiaukampinė AD dalija kraštinę BC santykiu $BD : DC = 2$. Kokiu santykiu pusiaukraštinė CE dalija pusiaukampinę AD?
5. Lygiagretainio $ABCD$ plotas lygus 1. Per jo kraštinės vidurio tašką E ir viršūnę A nubrėžta tiesė kerta įstrižainę BD taške Q. Raskite keturkampio $QMCD$ plotą.
6. Tiesė ℓ kerta trikampio ABC kraštines AB ir BC taškuose D ir E, o kraštinės AC tęsinį — taške F. Įrodykite, kad atkarpų DC, AE ir BF vidurio taškai yra vienoje tiesėje.
7. Vienoje tiesėje pažymėti taškai A_1, B_1, C_1, o kitoje — taškai A_2, B_2 ir C_2. Tiesės A_1B_2 ir A_2B_1 kertasi taške P, tiesės B_1C_2 ir B_2C_1 — taške Q, tiesės C_1A_2 ir C_2A_1 — taške R. Įrodykite, kad taškai P, Q ir R yra vienoje tiesėje (Papo teorema).

RAŠYKITE MUMS

XI klasės matematikos uždavinyne (*Matematika* 11. *Uždavinynas*, p. 80) yra toks uždavinys (Nr. 40):

Egzamino metu studentai sėdi už bendro stalo ant vieno suolo, kurio abu galai yra šalia praėjimų. Egzaminą studentai baigia atsitiktine tvarka ir išsyk išeina. Kokia tikimybė, kad bent vienas studentas, norėdamas išeiti, turės paprašyti jį praleisti, jeigu studentų yra: a) 3; b) 4; c) 6?

Uždavinio autoriaus rankraštyje buvo prašoma apskaičiuoti tikimybę, jei studentų yra 6. Man pasirodė, kad tas uždavinys mokiniams per sunkus. Todėl sąlygoje atsirado a) ir b) atvejai, o pats uždavinys buvo pažymėtas žvaigždute. Pasiteiravus autoriaus, ar tikrai tas uždavinys mokiniams įkandamas, buvo atsakyta, kad jį turėjo spręsti tie, kurie laikė valstybinį 2002 m. egzaminą pakartotinės sesijos metu...

Prisipažinsiu, su nedideliu skaičiumi studentų aš susitvarkau, bet jei jų būtų $10, \ldots, 17, \ldots, n$? Padėkite.

Valdas Vanagas