$\alpha + \omega$, 2003, Nr. 1, 34–42

Ar tikrai trikampio kampų suma lygi 180°?

Petras Vaškas

Geometrijos aksiomų sistemą galima sudaryti įvairiai. Autorius nagrinėja, kaip kai kurie euklidinės geometrijos teiginiai įrodomi aksioma laikant teiginį, kad trikampio kampų suma lygi 180°. Aptariamas šio teiginio ir lygiagrečių tiesių aksiomos ryšys.

1. Geometrijos aksiomos

Geometrijoje teiginius priimta įrodyti. Įrodant vienus teiginius, tenka remtis kitais. Aišku, kad įrodymas negali tęstis be galo. Todėl reikalingi teiginiai, kurie laikomi teisingais be įrodymo. Tokie teiginiai vadinami aksiomomis. Tai paprasti, protui akivaizdūs teiginiai. Pavyzdžiui, aksioma laikomas teiginys „per du taškus galima nubrėžti tik vieną tiesę".

Nuosekliai laikantis griežtumo, aksiomų reikia priimti kiek galima mažiau. Tačiau tada ir kai kuriuos akivaizdžius teiginius reikia įrodyti. Tai ne visada lengva. Todėl mokykliniame kurse be įrodymo priimami ir kai kurie teiginiai, kuriuos netiktų laikyti aksiomomis.

O kuriuos teiginius reikia laikyti aksiomomis? Į šį klausimą negalima vienareikšmiškai atsakyti. Juoba kad:

1) vieną aksiomą galima pakeisti kita ir toliau įrodinėjant gauti tuos pačius rezultatus,

2) vieną aksiomą galima pakeisti jai priešingu teiginiu ir gauti kitus, praktiškai pritaikomus rezultatus.

Čia verta priminti aksiominio metodo geometrijoje ištakas. Taip išdėstytos geometrijos pavyzdį daugiau kaip prieš du tūkstančius metų pateikė graikų matematikas Euklidas veikale „Pradmenys". Vėliau jo panaudota aksiomų sistema visą laiką buvo tobulinama. Bene daugiausia rūpesčių matematikams pridarė vadinamasis penktasis Euklido postulatas (gal dėl sudėtingesnės jo formuluotės; Euklido postulatą pateiksime vėliau). Jis buvo pakeistas lygiagrečiųjų tiesių aksioma „plokštumoje per tašką, nepriklausantį turimai tiesei, eina ne daugiau kaip viena tiesė, lygiagreti su turima tiese" (t. y neturinti su ja nė vieno bendro taško). Buvo manoma, kad šį teiginį galima įrodyti. Tik XIX amžiuje buvo įrodyta, kad, remiantis kitomis Euklido sistemos aksiomomis, jo įrodyti negalima. Vadinasi, yra dvi galimybės:

1) laikyti tą teiginį aksioma,

2) aksioma laikyti jam priešingą teiginį ir sukurti kitokią geometriją.

Iš pateiktų Euklido lygiagrečiųjų tiesių aksiomos įrodymų paaiškėdavo, kad įrodant minėta aksioma tebūdavo pakeičiama kitu teiginiu (kita aksioma). Vienas tokių teiginių — trikampio kampų suma lygi 180°.

Čia ir pakalbėsime apie Euklido lygiagrečių tiesių aksiomą bei trikampio kampų sumą.

2. Trikampio kampų sumos aksioma

Matematikos vadovėlyje V klasei ([1], p. 154, 29 užd.) siūloma nusibraižyti po vieną smailųjį, statųjį bei bukąjį trikampius ir:

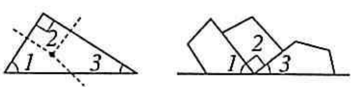
a) išmatuoti jų kampus,

b) rasti kiekvieno trikampio kampų sumą,

c) pasakyti, kuris iš skaičių 90°, 100°, 180° ir 200° yra artimiausias gautoms sumoms.

Labai tiksliai suformuluotas klausimas c), aišku, tikintis atsakymo 180°. Vargu ar galima tikėtis, jog kas nors ryšis tvirtinti, kad ta suma lygi tiksliai 180° (nebent tas, kuris norėtų pasirodyti mokąs labai tiksliai matuoti!). Aišku, visais atvejais rezultatai bus artimi 180°. Tačiau vis dėlto negalėsime logiškai griežtai tvirtinti, kad trikampio kampų suma visada lygi 180° (iš tolesnių uždavinių aiškėja, jog taip laikoma), o skirtumas susidaro tik dėl matavimų netikslumo. Antra, praktiškai negalime išmatuoti visų trikampių (jų yra be galo daug) kampų ir apskaičiuoti jų sumų.

Tame pačiame vadovėlyje (p. 154) siūlomas kitas būdas trikampio kampų sumai skaičiuoti.



1 pav.

30. *Atskirame lape nusibraižykite trikampį ir sukarpykite, kaip parodyta piešinyje. Nubrėžkite tiesę, pažymėkite joje tašką ir iškirptus trikampio kampus sudėkite vieną šalia kito taip, kaip parodyta. Kam lygi trikampio kampų suma?*

Pagrįstai galima tikėtis, kad, taip sudėję trikampio kampus, gausime ištiestinį kampą (1 pav.). Todėl galėsime teigti (gal net tvirčiau, nei ankstesniu atveju), kad trikampio kampų suma lygi 180°.

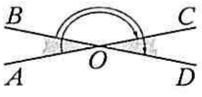
Kaipgi turėtume vertinti teiginį „trikampio kampų suma lygi 180°", kai jis laikomas teisingu? Kadangi jis nėra pagrįstas įrodymais, o gautas tik iš pavyzdžių (nors jų ir nemažai), jį tenka laikyti aksioma.

3. Figūrų lygumas

Kalbant apie figūrų lygumą, VII klasės vadovėlyje ([2], p. 148) rašoma:

Jeigu dvi plokštumos figūras galima uždėti vieną ant kitos taip, kad jos sutaptų (pastumiant, pasukant, apverčiant), tai sakoma, kad figūros yra lygios.

4. Kryžminių kampų savybė

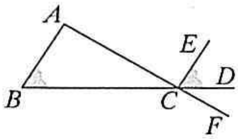


2 pav.

Įrodysime, kad kryžminiai kampai yra lygūs.

Nagrinėkime kryžminius kampus AOB ir COD (2 pav.). Kampą AOB apie tašką O pasukime per pusę apsisukimo. Jis sutaps su kampu COD. Vadinasi, tie kampai yra lygūs: $\angle AOB = \angle COD$ (žr. 3 skyrelį).

5. Pirmoji trikampio priekampio teorema



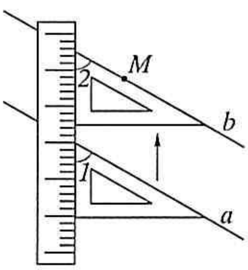
3 pav.

Įrodysime, kad trikampio priekampis yra didesnis už kiekvieną jam negretutinį trikampio kampą.

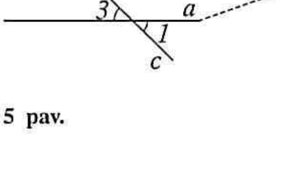
Nagrinėkime trikampį ABC ir jo priekampį ACD (3 pav.). Kampą ABC pastumkime per atkarpą BC. Gausime kampą ECD, lygų kampui ABC (žr. 3 skyrelį). Jis sudaro tik dalį kampo ACD todėl $\angle ECD < \angle ACD$, arba $\angle ACD > \angle ECD$. Tada ir $\angle ACD > \angle ABC$.

Panašiai įrodytume, kad $\angle BCF > \angle BAC$. Kadangi $\angle BCF = \angle DCA$ (kaip kryžminiai kampai), tai ir $\angle ACD > \angle BAC$.

6. Lygiagrečiosios tiesės



4 pav.



5 pav.

1. Sakykime, turime tiesę a ir jai nepriklausantį tašką M. Darykime, taip, kaip aprašyta vadovėlyje ([3], p. 20).

Pridėkime kampainį taip, kad jo įžambinė būtų tiesėje a (4 pav.). Prie kampainio statinio pridėkime liniuotę, kaip parodyta 4 paveiksle. Nepajudinę liniuotės, kampainį stumkime tol, kol jo įžambinė pasieks tašką M. Per kampainio įžambinę brėžkime tiesę b.

Kampai *1* ir *2* (atitinkamieji kampai, gauti dvi tieses perkirtus trečiąja) yra lygūs (žr. 3 skyrelį). Įrodysime, kad a ir b yra lygiagrečios tiesės.

Tiesės a ir b negali susikirsti taip, kaip parodyta 5 paveiksle, nes tada gautume trikampį, kurio priekampis ($\angle 1$) lygus jam negretutiniam trikampio kampui ($\angle 2$). Tas prieštarautų pirmajai trikampio priekampio teoremai (žr. 5 skyrelį). Tiesės a ir b negali susikirsti ir kitoje tiesės c pusėje, nes tada trikampio priekampis ($\angle 4$) taip pat būtų lygus jam negretutiniam trikampio kampui ($\angle 3$) (čia dar rėmėmės kryžminių kampų savybe).

Kadangi tiesės a ir b neturi nė vieno bendro taško, tai jos yra lygiagrečios: $a \parallel b$.

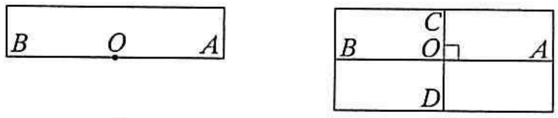
Pastaba. Čia įrodėme dviejų tiesių lygiagretumo pagal atitinkamuosius kampus požymį.

2. Įrodėme, kad per tašką, nepriklausantį tiesei, galima nubrėžti su ja lygiagrečią tiesę. Kiek tokių tiesių yra? Neskubėkime atsakyti, kad tik viena. Juk kampainį prie tiesės a galima pridėti ir kitaip, t. y. kad tiesėje a būtų vienas ar kitas statinis. Kiekvienu iš tų trijų atvejų kampainį galima pastumti palei tiesę a į vieną ar į kitą pusę. Kad visais atvejais gausime tą pačią tiesę, įrodysime, remdamiesi tuo, jog trikampio kampų suma lygi 180°.

Prieš tai išnagrinėkime keletą papildomų teiginių.

7. Statmenosios tiesės

Pasiimkime popieriaus lapą (dalį plokštumos). Perlenkime jį pusiau. Lenkimo linijoje (tiesėje AB) pasirinkime tašką. Pažymėkime jį raide O (6 pav., a). Gausime ištiestinį kampą AOB.



6 pav. a) b)

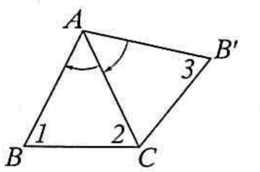
Lapą vėl ištieskime. Perlenkime jį taip, kad spindulys OA sutaptų su spinduliu OB. Lenkimo tiesę pažymėkime CD. Lapą vėl ištieskime. Gausime dvi tieses AB ir CD, kurios susikirsdamos sudaro keturis lygius kampus (žr. 3 skyrelį). Jie vadinami stačiaisiais kampais.

Sakoma, kad AB ir CD yra statmenosios tiesės. Dar teigiame, kad per bet kurį tiesės (AB) tašką (O) eina vienintelė tai tiesei statmena tiesė (CD).

8. Lygiašonio trikampio kampų savybė

Įrodysime, kad lygiašonio trikampio kampai prie pagrindo yra lygūs.

Nagrinėkime trikampį ABC, kurio $AB = AC$ (7 pav.). Įrodysime, kad $\angle 1 = \angle 2$.



7 pav.

Įsivaizduokime, kad trikampį ABC pervertėme per tiesę AC ir pažymėjome taško B padėtį — tašką B'. Trikampis $AB'C$ lygus trikampiui ABC (žr. 3 skyrelį). Skyrium imant,

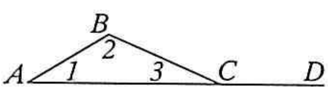
$$AB' = AB, \qquad \angle CAB' = \angle CAB, \qquad \angle 3 = \angle 1.$$

Įsivaizduokime, kad trikampį ABC pasukame apie tašką A kampu CAB'. Kadangi $\angle CAB' = \angle CAB$, tai kraštinė AC eis kraštine AB, kraštinė AB' — kraštine AC. Kadangi $AC = AB$, tai taškas C sutaps su tašku B. Kadangi $AB' = AB(= AC)$, tai taškas B' sutaps su tašku C. Vadinasi, trikampis ABC sutaps su trikampiu $AB'C$. Tada $\angle 3 = \angle 2$.

Iš $\angle 3 = \angle 1$ ir $\angle 3 = \angle 2$ gauname $\angle 1 = \angle 2$.

9. Antroji trikampio priekampio teorema

Įrodysime, kad trikampio priekampis lygus jam negretutinių trikampio kampų sumai. Nagrinėkime trikampį ABC ir jo priekampį BCD (8 pav.).



8 pav.

Remdamiesi trikampio kampų sumos aksioma, gauname

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°.$$

Kadangi $\angle BCD$ ir $\angle 3$ yra gretutiniai kampai, tai

$$\angle BCD + \angle 3 = 180°.$$

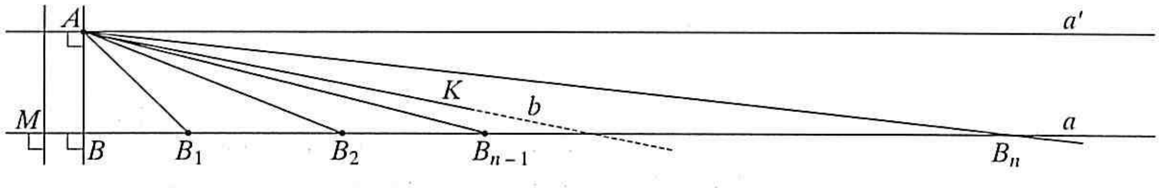
Iš šių lygybių ir gauname $\angle BCD = \angle 1 + \angle 2$.

$\alpha + \omega$

10. Lygiagrečių tiesių teorema

Įrodykime (remdamiesi ir trikampio kampų sumos aksioma), kad plokštumoje per tašką, nepriklausantį tiesei, eina vienintelė tiesė, lygiagreti su turima tiese. Kad tokia tiesė yra, jau įrodėme 6 skyrelyje. Įrodykime, kad ji tik viena.

Nagrinėkime tiesę a ir jai nepriklausantį tašką A (9 pav.).



9 pav.

Pasirinkime tiesės a tašką. Pažymėkime jį raide M. Pasinaudodami liniuote ir kampainiu nubrėžkime:

- per tašką M — tiesę, statmeną tiesei a;
- per tašką A — tiesę, statmeną tiesei a; jos ir tiesės a susikirtimo tašką pažymėkime raide B;
- per tašką A — tiesę, statmeną tiesei AB; ją pažymėkime a'.

Tiesė a' yra lygiagreti su tiese a (dviejų tiesių lygiagretumo pagal atitinkamuosius kampus požymis; 6 skyrelis). Įrodysime, kad kitos tiesės, einančios per tašką A ir lygiagrečios su tiese a, nėra.

Sakykime, b — bet kuri tiesė, einanti per tašką A, o smailusis kampas $\angle BAK = (1-k)\cdot 90°, 0 < k < 1$. Įrodysime, kad tiesė b (tiksliau — spindulys AK) kerta tiesę a.

Tiesėje a nuosekliai atidėkime šitokias atkarpas:

$$BB_1 = BA, \quad B_1B_2 = B_1A, \quad \ldots, \quad B_{n-1}B_n = B_{n-1}A, \ldots.$$

Nagrinėkime lygiašonius trikampius

$$ABB_1, AB_1B_2, \ldots, AB_{n-1}B_n, \ldots.$$

Kadangi trikampio kampų suma lygi 180°, trikampio priekampis lygus jam negretutinių trikampio kampų sumai ir lygiašonio trikampio kampai prie pagrindo yra lygūs, tai

$$\angle BB_1A = \frac{1}{2}\cdot 90°, \ \angle BB_2A = \frac{1}{2^2}\cdot 90°, \ldots, \angle BB_nA = \frac{1}{2^n}\cdot 90°, \ldots.$$

Tada

$$\angle BAB_n = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)90°.$$

Pasirinkime tokį n, kad būtų

$$\frac{1}{2^n} < k \quad \left(2^n > \frac{1}{k}\right).$$

Tada $\angle BAK < \angle BAB_n$, spindulys AK yra kampo BAB_n viduje, kerta jo kraštinėse AB ir AB_n esančius taškus B ir B_n jungiančią atkarpą BB_n. Vadinasi, ir tiesė b kerta tiesę a.

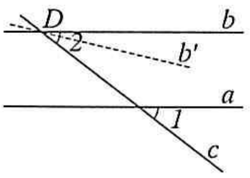
Teiginys įrodytas. (Griežtai kalbant, reikėtų įrodyti, kad spindulys AK kerta BB_n, bet tai laikome aksioma.)

11. Lygiagrečių tiesių aksioma

Laikykime aksioma šitokį teiginį: plokštumoje per tašką, nepriklausantį tiesei, eina ne daugiau kaip viena tiesė, lygiagreti su turima tiese.

Jau 6 skyrelyje įrodėme (nesiremdami trikampio kampų sumos aksioma), kad plokštumoje per tašką, nepriklausantį turimai tiesei, eina su ja lygiagreti tiesė. Remdamiesi suformuluota aksioma, gauname, kad tokia tiesė yra tik viena.

12. Lygiagrečių tiesių ir jų kirstinės sudarytų atitinkamųjų kampų savybė



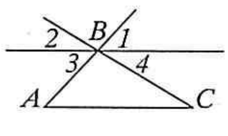
10 pav.

Įrodysime teoremą: jei dvi lygiagrečias tieses perkirsime tiese, tai gausime lygius atitinkamuosius kampus.

Sakykime, $a \parallel b$, tiesė c kerta tieses a ir b, taškas D — vienas iš susikirtimo taškų. Įrodysime, kad $\angle 2 = \angle 1$ (10 pav.).

Tarkime, kad $\angle 2 \neq \angle 1$. Per tašką D nubrėžkime įsivaizduojamą tiesę b' (ji nurodyta brūkšnine linija), kad atitinkamieji kampai būtų lygūs. Remiantis dviejų tiesių lygiagretumo pagal atitinkamuosius kampus požymiu, išeitų, kad $b' \parallel a$. Jei b' nesutaptų su b, tai per tašką D eitų dvi tiesės (b ir b'), lygiagrečios su tiese a. Tai prieštarautų lygiagrečių tiesių aksiomai. Vadinasi, prielaida, kad $\angle 2 \neq \angle 1$, yra klaidinga. Taigi $\angle 2 = \angle 1$.

13. Trikampio kampų sumos teorema



11 pav.

Įrodysime, kad trikampio kampų suma lygi 180°.

Nagrinėkime trikampį ABC. Per viršūnę B nubrėžkime tiesę, lygiagrečią su tiese AC ir pratęskime CB bei AB (11 pav.).

$\angle 1 + \angle B + \angle 2 = 180°$.

Tačiau $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$ (kaip kryžminiai kampai), $\angle 1 = \angle A$, $\angle 2 = \angle C$ (kaip lygiagrečių tiesių ir jų kirstinės sudaryti atitinkamieji kampai). Vadinasi, $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

Išnagrinėjome Euklido lygiagrečių tiesių aksiomos ir trikampio kampų sumos lygumo 180° abipusį ryšį (ekvivalentiškumą). Išeitų, kad, priėmę kitokią lygiagrečiųjų tiesių aksiomą, gautume, jog trikampio kampų suma nelygi 180°. Ar tai realu? Netrukus tuo įsitikinsime.

14. Plokštuma ir sfera

Kalbant apie Euklido geometrijos taikymą praktiniams uždaviniams spręsti, pravartu prisiminti, kad pats žodis „geometrija“ — graikiškas. Išvertus į lietuvių kalbą, jis reiškia žemės matavimą. Šis žodis atskleidžia geometrijos kilmę. Euklido geometrijos (planimetrijos) rezultatai žemės matavimo darbams taikomi ir dabar. Tačiau Žemės paviršius yra artimesnis rutulio paviršiui (sferai), o ne plokštumai, kaip ją paprastai įsivaizduojame. Iš tiesų. Pabandykime ant rutulio (pavyzdžiui, ant sviedinio) užklijuoti popieriaus gabalėlį (plokštumos dalį). Jeigu rutulys nedidelis, tai tik nedidelį popieriaus gabalėlį galėsime beveik sutapdinti su rutulio paviršiaus dalimi. Jeigu stengsimės sutapdinti didesnį gabalėlį, jis supliš arba susiraukšlės.

Tad natūralu manyti, kad ir Euklido geometrijos (planimetrijos) dėsnius galėsime taikyti tik nedidelėms rutulio paviršiaus dalims, o didesnėms jau tikriausiai prireiks kitokios geometrijos.

Kadangi pirminės sąvokos geometrijoje nėra apibrėžiamos, tai pačią sferą galime laikyti „plokštuma“. Tuo labiau, kad, judėdami sfera, o ne žiūrėdami į ją iš šalies, mes nejuntame, ar judame sferiniu paviršiumi, ar plokščiu, ypač jei sferos spindulys pakankamai didelis.

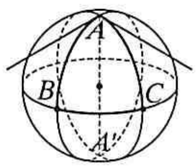
15. Sferos geometrija

Sferą laikydami plokštuma, taškus įsivaizduojame taip pat, kaip ir ant plokščio paviršiaus.

Norėdami įsivaizduoti tiesę ant plokščio paviršiaus, galėjome imti ant jo ištemptą siūlą. Tą patį padarykime ir ant rutulio paviršiaus. Pavyzdžiui, pasirinkę ant gaublio du taškus, priklausančius vienam dienovidiniui, ir per juos ištempę siūlą, matysime, kad siūlas eis tuo dienovidiniu. Todėl „tiesėmis“ laikysime dienovidinio tipo linijas. Jas galima gauti sferą perkirtus plokštumomis, einančiomis per sferos centrą. Tai sferos didieji apskritimai.

Čia jau prasideda „netikrumai“.

Bet kurios dvi plokštumos, einančios per sferos centrą, susikerta (12 pav.).



12 pav.

Taigi susikerta ir bet kurios dvi tiesės. Lygiagrečiųjų tiesių nėra.

Tokių tiesių kampu laikysime kampą, kurį sudaro apskritimų liestinės.

Turime planimetrijoje neminimą figūrą — dvikampį ($ABA'C$; B ir C — pusiaujo taškai; 12 pav.). Paryškinta figūra — trikampis ABC. Du jo kampai (ABC ir ACB) — statieji, trečias kampas BAC gali būti bet koks. Taigi tokio trikampio kampų suma nėra lygi 180° (π radianų). Ji nėra ta pati visiems trikampiams, tačiau didesnė už π. Aišku, kad trikampis gali turėti ir tris stačiuosius kampus.

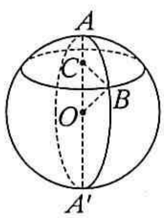
Paminėsime dar kelis rezultatus.

Sakykime, sferos spindulys yra R. Žinoma, kad tokios sferos plotas lygus $4\pi R^2$. Tarkime, kad trikampio ABC visi trys kampai yra statieji. Tada trikampis sudaro $\frac{1}{8}$ visos sferos, todėl jo plotas yra lygus $\frac{1}{8} \cdot 4\pi R^2 = \frac{1}{2}\pi R^2$. Trikampio kraštinės lygios $\frac{1}{4} \cdot 2\pi R = \frac{1}{2}\pi R$, jo aukštinės lygios $\frac{1}{2}\pi R$. To trikampio kraštinės ir į ją nubrėžtos aukštinės sandaugos pusė $\frac{1}{8}\pi^2 R^2 \neq \frac{1}{2}\pi R^2$. Taigi įprasta trikampio ploto formulė čia netinka.

Įrodoma, kad bet kurio sferinio trikampio ABC plotas

$$S_{ABC} = R^2\big((A + B + C) - \pi\big);$$

čia A, B, C išreikšti radianais.



13 pav.

Sakykime, sferą perkirtome plokštuma, statmena skersmeniui AA' ir einančia per tašką C (13 pav.). Gautas pjūvis bus sferos „apskritimas“, kurio „spindulys“ $\smile AB = r$. Tada $\angle AOB = \frac{r}{R}$ (radianų), o apskritimo ilgis $\ell = 2\pi R \sin\frac{r}{R}$. Vadinasi, apskritimo ilgio ir jo „skersmens“ santykis

$$\ell : 2r = 2\pi R \sin\frac{r}{R} : 2r = \pi\left(\sin\frac{r}{R}\right) : \frac{r}{R}$$

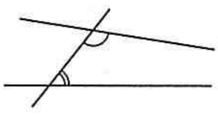
nėra pastovus. Tačiau, kai $\frac{r}{R} \to 0$, $(\sin \frac{r}{R}) : \frac{r}{R} \to 1$, ir gauname žinomą rezultatą.

16. Penktasis Euklido postulatas

Grįžkime prie atvejo, kai lygiagrečiosios tiesės yra.

Daugiau kaip prieš du tūkstančius metų graikų matematikas Euklidas veikale „Pradmenys" suformulavo aksiomą, sukėlusią daugiausia ginčų ir dėmesio. Tai vadinamasis penktasis Euklido postulatas:

Jei tiesė, kertanti dvi tieses, iš vienos pusės sudaro vidinius kampus, mažesnius už du stačiuosius, tai neribotai pratęstos tos tiesės susikirs iš tos pusės, iš kurios kampai mažesni už du stačiuosius.



14 pav.

(Čia frazę „mažesnius už du stačiuosius" reikia suprasti, kad tų dviejų kampų suma mažesnė už du stačiuosius kampus; 14 pav.).

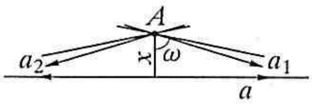
Penktasis Euklido postulatas nėra akivaizdžiai teisingas, o jo formuluotė yra kur kas ilgesnė ir sudėtingesnė už kitų aksiomų formuluotes. Tikriausiai dėl to daugelis matematikų penktąjį Euklido postulatą bandė įrodyti, remdamiesi kitomis Euklido aksiomomis. Dažniausiai buvo daroma maždaug šitaip: tarus, kad lygiagrečiųjų tiesių aksioma (penktasis Euklido postulatas) neteisinga, bandoma parodyti, kad tai prieštarauja likusioms aksiomoms. Jeigu šitai pavyktų, tai būtų įrodyta, jog prielaida klaidinga, o lygiagrečių tiesių aksioma teisinga. Be to, lygiagrečiųjų tiesių aksioma virstų teorema, kurią galima įrodyti remiantis kitomis aksiomomis.

Nors buvo daug ir įvairių tokio pobūdžio bandymų, tačiau rasti prieštaravimo nepavyko. Jeigu kas ir tarėsi pasiekęs tikslą, tai kiti tyrėjai, nuodugniau išanalizavę, rasdavo kur nors padarytą klaidą arba pastebėdavo, kad vietoj lygiagrečiųjų tiesių aksiomos paimta kita jai ekvivalenti aksioma. Šitaip įrodinėjant, buvo gaunama keistų teiginių. Pavyzdžiui: trikampio kampų suma nelygi 180°; plokštumos taškų, vienodai nutolusių nuo tiesės, aibė nėra tiesė, ir kt. Buvo manoma, kad čia jau gauti prieštaravimai ir penktasis Euklido postulatas įrodytas. Tačiau ir iš jų nematyti, kad prieitas loginis prieštaravimas, kad tai absoliučiai negalima. Jie tiktai atrodo nenatūralūs, nesiderina su tuo, prie ko jau esame įpratę, kuo tikime.

17. Lobačevskio geometrija

XIX a. pradžioje kai kurie matematikai jau pradėjo suprasti, kad, einant tokiu keliu, vargu ar pavyks ką nors pasiekti. Bemaž tuo pat metu, vienas nuo kito nepriklausomai, trys matematikai — N. Lobačevskis (1792–1856), K. F. Gausas (1777–1855) ir J. Bojajis (1802–1860) — priėjo išvadą, kad egzistuoja visiškai skirtinga nauja geometrija. Nesigilindami į istorinius aspektus, paminėsime keletą tokios (vadinamosios Lobačevskio) geometrijos faktų. Lobačevskis manė, kad, remiantis kitomis Euklido aksiomomis, įrodyti penktojo Euklido postulato negalima. Vadinasi, pakeitę tą postulatą jam priešinga aksioma, jokio prieštaravimo negausime. Jis ir kūrė geometriją, remdamasis šitokia aksioma: plokštumoje per tašką, nesantį tiesėje, galima nutiesti bent dvi tieses, nekertančias tos tiesės.

Nagrinėsime tiesę a ir jai nepriklausantį tašką A (15 pav.). Remiantis Lobačevskio lygiagrečiųjų tiesių aksioma ir kitomis Euklido geometrijos aksiomomis, įrodoma, kad per tašką A eina be galo daug tiesių, kurios kerta tiesę a, ir be galo daug tiesių, kurios nekerta tiesės a. Dvi tiesės (a_1 ir a_2), nekertančios tiesės a, vienas tų tiesių atskiria nuo kitų. Tiesės a_1 ir a_2 vadinamos tiesėmis, lygiagrečiomis su tiese a (atitinkama kryptimi). Kitos tiesės, kurios nekerta tiesės a, vadinamos išsiskiriančiomis su tiese a.



15 pav.

Rodyklėmis pažymėtomis kryptimis (lygiagretumo kryptimis) tiesių a_1 ir a_2 taškai neribotai artėja prie tiesės a. Aišku, kad tokioje geometrijoje trikampio kampų suma nelygi 180° (žr. 10 skyrelį). Ji nėra pastovi ir yra mažesnė už 180°.

Iš kitų rezultatų dar paminėsime Lobačevskio funkciją (lygiagretumo kampą)

$$\omega = \Pi(x) = 2 \operatorname{arctg} e^{-\frac{x}{\rho}}, \qquad e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}71828\ldots;$$

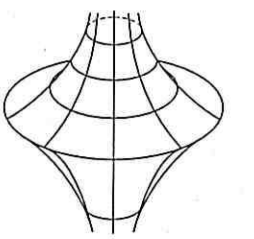
čia $\rho > 0$ — konstanta, vadinama Lobačevskio erdvės kreivumo spinduliu.

Pabrėžtina: kai $\frac{x}{\rho} \to 0$, tai $\Pi(x) \to \frac{\pi}{2}$, o tai atitinka Euklido geometriją.

18. Lobačevskio plokštumos modelis

Galime sakyti, kad esame įpratę prie Euklido plokštumos geometrijos.

Nagrinėdami sferą ir „tiesėmis" laikydami jos didžiuosius apskritimus („tiesiausias" ir „trumpiausias" sferos linijas), gauname praktišką geometriją, kuri skiriasi nuo Euklido planimetrijos ir nuo Lobačevskio geometrijos.


16 pav.

Beje, panašiu būdu galima įprasminti ir Lobačevskio geometriją. Tam tikslui vietoj plokštumos ar sferos reikia imti pseudosferą (16 pav.), o „tiesėmis" laikyti „tiesiausias" (tuo pačiu ir „trumpausias") pseudosferos linijas — jos geodezines linijas.

Praktiškai bet kurio paviršiaus geodezinę liniją galime gauti šitaip: imti siaurą popieriaus juostelę, per kurios vidurį nubrėžta tiesė, ir kloti ją ant paviršiaus — tiesė išlinksta į paviršiaus geodezinę liniją.

1. *Matematika ir pasaulis 5 klasei*, TEV, Vilnius, 1996.
2. *Matematika 7, I dalis*, TEV, Vilnius, 1998.
3. *Matematika 7, II dalis*, TEV, Vilnius, 1998.