$\alpha + \omega$, 2003, Nr. 1, 11–19

XIV prof. J. Matulionio jaunųjų matematikų konkursas

V. Karpickaitė, L. Papreckienė, V. Pekarskas
laima.papreckiene@fmf.ktu.lt, vidmantas.pekarskas@fmf.ktu.lt

Pirmąjį vasario šeštadienį, kuris šiais metais sutapo su vasario pirmąja, iš pat ryto KTU Elektronikos rūmuose šurmuliavo didelis mokinių būrys, o aikštelėje prie rūmų stovėjo daug geltonų autobusiukų, tokių neįprastų šioje vietoje. Tą dieną į tradicinį 14-ąjį prof. J. Matulionio jaunųjų matematikų konkursą, rengiamą KTU Fundamentaliųjų mokslų fakulteto matematikų nuo 1990 metų, susirinko 588 mokiniai. Suvažiavo jie iš įvairiausių Lietuvos kampelių atstovauti 75 vidurinėms mokykloms bei gimnazijoms. Gausiausiai dalyvavo moksleiviai iš KTU gimnazijos, Kauno Aleksandro Puškino vid. m-klos, Kauno „Rasos“ gimnazijos, Kaišiadorių r. Žiežmarių vid. m-klos, Plungės „Saulės“ gimnazijos, Tauragės gimnazijos, Ukmergės Jono Basanavičiaus vid. m-klos, Kauno „Saulės“ gimnazijos, Vilniaus Jono Pauliaus II vid. m-klos, Kuršėnų Pavenčių vid. m-klos, Kaišiadorių Vaclovo Giržado vid. m-klos, Ukmergės „Šilo“ vid. m-klos. Geriausiai sekėsi spręsti uždavinius KTU gimnazijos, Vilniaus tiksliųjų, gamtos ir technikos mokslų licėjaus, Visagino „Atgimimo“ gimnazijos ir „Gerosios vilties“ vid. m-klos, Zarasų „Ąžuolo“ vid. m-klos atstovams. Maloniai nustebino aštuntokas Deirūnas Visockas iš Kauno J. Jablonskio gimnazijos, sprendęs IX klasės uždavinius ir laimėjęs pirmąją vietą.

Toliau pateikiame 14-ojo konkurso užduotis, jų sprendimus ir nugalėtojų sąrašą.

IX klasės užduotis

1. Ar pretendentas surinko pusę rinkėjų balsų, jei į rinkimus atvyko 60% rinkėjų, iš kurių 40% balsavo už pretendentą? *(2 taškai)*
2. Stačiojo trikampio statinių ilgiai lygūs 3 ir 4. Raskite atstumą tarp apibrėžto ir įbrėžto apskritimų centrų. *(4 taškai)*
3. Raskite tris teigiamus skaičius, kurių pirmasis mažesnis už antrąjį tiek, kiek antrasis mažesnis už trečiąjį, o dviejų mažesniųjų skaičių sandauga lygi 85 ir dviejų didesniųjų skaičių sandauga lygi 115. *(4 taškai)*
4. Stačiakampio $900\,\mathrm{m}^2$ ploto sklypo dvi gretimas kraštines reikia aptverti akmenine, o kitas dvi medine tvora. Akmeninės tvoros 1 m kainuoja 25 Lt, 1 m pušinių lentelių — 10 Lt, o drebulinių lentelių — 8 Lt. Ar užteks tam skirtos 2000 Lt sumos? *(5 taškai)*
5. Kiek yra natūraliųjų skaičių nuo 1 iki 1000, nesidalijančių nei iš 5, nei iš 7? *(5 taškai)*

X klasės užduotis

1. Užduotį sudaro 20 uždavinių. Už kiekvieną teisingai išspręstą uždavinį skiriami 8 balai, už kiekvieną klaidingą sprendimą — minus 5 balai, o už neספręstą uždavinį — 0 balų. Kiek uždavinių sprendė mokinys, jeigu jo darbas įvertintas 13 balų? *(4 taškai)*
2. Du žaidėjai vienas po kito vietoje kurio nors vieno iš lygties $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$ koeficientų A, B ir C įrašo realųjį skaičių. Žaidimą pradedančiojo tikslas — gauti lygtį, turinčią *tik vieną* realųjį sprendinį. Ar gali jam sutrukdyti antrasis? *(4 taškai)*
3. Rombo įstrižainių ilgiai lygūs 2 ir 3. Rombas pasukamas apie jo centrą 90° kampu. Raskite abiejų rombų bendrosios dalies plotą. *(4 taškai)*

4. Kiek vienodų narių yra dviejose aritmetinėse progresijose $5, 8, 11, \ldots$ ir $3, 7, 11, \ldots$, turinčiose po šimtą narių? *(4 taškai)*
5. Trikampio kraštines sieja lygybė $a^3 = b^3 + c^3$. Ar kampas A gali būti smailusis? Bukasis? Statusis? *(4 taškai)*

XI klasės užduotis

1. Išspręskite lygčių sistemą $\begin{cases} x^3 + y^3 = 4, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3. \end{cases}$ *(4 taškai)*
2. Trys vienodi apskritimai susikerta stačiais kampais, t. y. jų liestinės susikirtimo taškuose yra statmenos viena kitai. Raskite visų skritulių bendrosios dalies — kreivojo trikampio plotą, jei apskritimų spindulio ilgis lygus r. *(5 taškai)*
3. Žodžiu SAUSAS užšifruotas skaičius, kuris dalijasi iš 101. Koks tai skaičius, jei skirtingos raidės žymi skirtingus skaitmenis? *(4 taškai)*
4. Teigiamus skaičius a ir b sieja nelygybė $a \cdot (1 - b) > \frac{1}{4}$. Kuris iš skaičių a ir b yra didesnis? *(3 taškai)*
5. $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ yra iracionalieji skaičiai. Koks iracionalusis skaičius yra $\sin 18°$? *(4 taškai)*

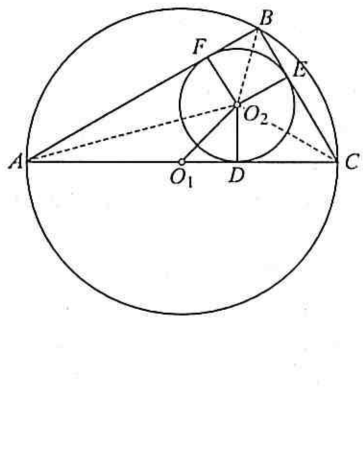
XII klasės užduotis

1. Taisyklingą trikampę prizmę, kurios pagrindo kraštinės ilgis lygus a, o aukštinės — H, kerta plokštuma, einanti per pagrindo kraštinę ir pasvirusi į pagrindą $60°$ kampu. Kokia yra šio pjūvio ploto S funkcinė priklausomybė nuo H? Nubraižykite funkcijos $S = S(H)$ grafiką. *(5 taškai)*
2. Įrodykite, kad $C_n^2 + C_{C_n^2}^2 = C_{C_n^2+1}^2$. *(4 taškai)*
3. Išspręskite lygtį $(\cos x)^{\sin^2 x - \frac{3}{2}\sin x + \frac{1}{2}} = 1$. *(4 taškai)*
4. Raskite skaičiaus $(\underbrace{99\ldots9}_{n})^3$ skaitmenų sumą. *(3 taškai)*
5. Sudėtinės palūkanos su metine palūkanų norma x per t metų nuo 1 sukaups sumą $(1+x)^t$, o paprastosios palūkanos su ta pačia norma sukaups $(1 + xt)$ sumą. Įrodykite, kad su kiekviena $x > 0$ reikšme:
   a) $(1 + x)^t < 1 + xt$, kai $0 < t < 1$;
   b) $(1 + x)^t > 1 + xt$, kai $t > 1$;
   c) $(1 + x)^t = 1 + xt$, kai $t = 1$. *(4 taškai)*

IX klasės užduoties sprendimai

1. Sakykime, kad yra x rinkėjų. Į rinkimus atvyko a, o už pretendentą balsavo b rinkėjų. Aišku, kad $a = 0{,}6x$ ir $b = 0{,}4a$ taigi $b = 0{,}4 \cdot 0{,}6x = 0{,}24x$.

   Atsakymas. Pretendentas nesurinko nė ketvirtadalio balsų.
2. Sakykime, kad O_1 ir O_2 yra apibrėžto ir įbrėžto apskritimų centrai; $AO_1 = O_1C = R$ — apibrėžto apskritimo spindulys, $O_2D = O_2E = O_2F = r$ — įbrėžto apskritimo spindulys, stačiojo trikampio statiniai $AB = 4$ ir $BC = 3$.



   Stačiojo trikampio įžambinė AC yra apibrėžto apskritimo skersmuo, todėl
$$AC = 2R = \sqrt{3^2 + 4^4} = 5, \quad R = 2{,}5.$$
   Kadangi $S_{\triangle ABC} = rp$, tai remdamiesi trikampio ploto formule gauname
$$\frac{3 \cdot 4}{2} = \frac{r(4 + 3 + 5)}{2}, \quad r = 1.$$

Aišku, kad keturkampis FO_2EB yra kvadratas, todėl $BE = 1$. Kadangi $EC = 2$, $DC = EC = 2$, tai $O_1D = O_1C - DC = 2{,}5 - 2 = 0{,}5$.
Iš stačiojo ΔO_1DO_2 išplaukia $O_1O_2 = \sqrt{1 + (0{,}5)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Atsakymas. Atstumas tarp apibrėžto ir įbrėžto apskritimų centrų $O_1O_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

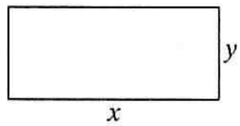
3. Sakykime, kad $0 < a < b < c$.
Tada

$$\begin{cases} b - a = c - b, & (1)\\ ab = 85, & (2)\\ bc = 115. & (3)\end{cases}$$

Sudėję (2) ir (3) lygybes, gauname $b(a + c) = 200$. Įrašę iš (1) lygybės gautą išraišką $a + c = 2b$, apskaičiuojame b: $2b^2 = 200$, $b = 10$.
Iš (2) ir (3) lygybių apskaičiuojame a ir c: $a = 8{,}5$, $c = 11{,}5$.

Atsakymas. $a = 8{,}5$; $b = 10$; $c = 11{,}5$.

4. Gretimas stačiakampio kraštines pažymėkime x ir y. Pirmiausia išnagrinėkime atvejį, kai pasirenkamos brangesnės — pušinės lentelės. Tada teisingi sąryšiai:



$$\begin{cases} xy = 900,\\ 10 \cdot (x + y) + 25 \cdot (x + y) \leqslant 2000,\end{cases}$$

$$35 \cdot \left(x + \frac{900}{x}\right) \leqslant 2000, \qquad x^2 - 2 \cdot \frac{1000}{35}x + 900 \leqslant 0,$$

$$\left(x - \frac{1000}{35}\right)^2 + \left(900 - \left(\frac{1000}{35}\right)^2\right) \leqslant 0. \qquad (1)$$

Kadangi skirtumas $900 - \left(\frac{200}{7}\right)^2 > 0$, tai (1) nelygybė sprendinių neturi.
Dabar užrašome tuos pačius sąryšius, kai pasirenkamos pigesnės lentelės:

$$\begin{cases} 8 \cdot (x + y) + 25 \cdot (x + y) \leqslant 2000,\\ y = \dfrac{900}{x};\end{cases}$$

$$33\left(x + \frac{900}{x}\right) \leqslant 2000, \qquad x^2 - 2 \cdot \frac{1000}{33}x + 900 \leqslant 0,$$

$$\left(x - \frac{1000}{33}\right)^2 + 900 - 918\frac{298}{1089} \leqslant 0, \qquad \left|x - \frac{1000}{33}\right| \leqslant \sqrt{18{,}2736},$$

$$26{,}028 < x < 34{,}578.$$

Atsakymas. Užteks pasirinkus pigesnę medinę tvorą, kai stačiakampis artimas kvadratui, t. y. kai kraštinė $26{,}028 < x < 34{,}578$.

5. Iš 5 dalijasi kas penktas skaičius ir jų yra $[\frac{999}{5}] = 199$; čia $[x]$ — skaičiaus x sveikoji dalis. Iš 7 dalijasi kas septintas skaičius, jų yra $[\frac{999}{7}] = 142$. Tačiau kas 35-as skaičius dalijasi ir iš 5, ir iš 7, tokių yra $[\frac{999}{35}] = 28$ skaičiai.

Taigi iš 5 arba iš 7 dalijasi $199 + 142 - 28 = 313$ skaičių, o nesidalija $999 - 313 = 686$ skaičiai.

Atsakymas. 686 skaičiai.

X klasės užduoties sprendimai

1. Tarkime, mokinys teisingai išsprendė x uždavinių, klaidingai — y uždavinių. Tada $8x - 5y = 13$ ir $x + y \leqslant 20$. Kadangi $y = \frac{8x-13}{5}$, tai $x + \frac{8x-13}{5} \leqslant 20$ ir todėl $x < 9$.
Perrenkame x:

x	$8x - 13 = 5y$	y	$x + y \leqslant 20$
2	3		
3	11		
4	19		
5	27		
6	$35 = 5y$	7	$6 + 7 < 20$
7	43		
8	51		

Atsakymas. Sprendė $6 + 7 = 13$ uždavinių.

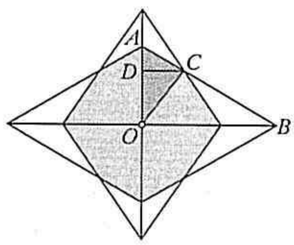
2. Ne. Pirmasis turėtų įrašyti $B = 1$. Tuomet kad ir kokį skaičių α vietoje A arba vietoje C įrašytų antrasis, pirmajam į likusio koeficiento (C arba A) vietą tereikia įrašyti tą patį α, nes

$$x^3 + \alpha \cdot x^2 + x + \alpha = 0, \qquad (x + \alpha) \cdot (x^2 + 1) = 0.$$

Taigi $x = -\alpha$ yra vienintelė realioji šaknis.

Pastaba. Buvo darbų, kuriuose mokiniai pirmajam patarė įrašyti bet kokį teigiamą skaičių B (Jeskevič Maksim iš Visagino „Gerosios vilties" vid. m-klos), $A = 0$ arba $B = 0$ (Vytautas Stepanauskas ir Agnė Bingelytė iš VTGTM licėjaus, Andžej Ziminskij iš Vilniaus Jono Pauliaus II vid. m-klos). Jie išnagrinėjo ir tolesnę taktiką, kurios turėtų laikytis pirmasis žaidėjas, norėdamas laimėti.

3. Sakykime, kad S yra abiejų rombų bendrosios dalies plotas. Tada $S = 8S_{\triangle OCA}$. Aišku, kad $AO = 1, OB = 1{,}5$. Pažymėkime $OC = l$. Tuomet



$$S_{\triangle OCA} = \frac{1 \cdot l \cdot \sin 45^\circ}{2}. \qquad (1)$$

Kadangi $\triangle CDA \backsim \triangle AOB$, tai $\frac{DC}{OB} = \frac{AD}{AO}$. Pažymėję $DC = x$, gauname proporciją $\frac{x}{1{,}5} = \frac{1-x}{1}$, iš kurios randame $x = \frac{3}{5}$.
Iš stačiojo $\triangle ODC$ išplaukia:

$$OC^2 = OD^2 + DC^2, \qquad l^2 = x^2 + x^2, \qquad l = x\sqrt{2} = \frac{3}{5}\sqrt{2}. \qquad (2)$$

Įrašę gautą l reikšmę į (1) lygtį,

$$S_{\triangle OCA} = \frac{1 \cdot \frac{3}{5}\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = 0{,}3.$$

Taigi $S = 8 \cdot 0{,}3 = 2{,}4$. *Atsakymas.* Abiejų rombų bendrosios dalies plotas $S = 2{,}4$.

4. Pirmosios aritmetinės progresijos $a_1 = 5$ ir $d_1 = 3$, todėl $a_n = 5 + 3(n-1)$ ir $a_{100} = 5 + 3 \cdot 99 = 302$. Antrosios progresijos pirmasis narys $A_1 = 3$ ir skirtumas $D_1 = 4$, todėl $A_k = 3 + 4(k-1)$ ir $A_{100} = 3 + 4 \cdot 99 = 399$.

Vienodų narių skaičių nustatome iš sąlygos $a_n = A_k$, arba $5 + 3(n-1) = 3 + 4(k-1)$, $3(n+1) = 4k$.

Kadangi $(n+1)$ turi dalytis iš 4, tai aišku, kad tarp $n = 1, 2, \ldots, 100$ yra 25 skaičiai, kurie dalijasi iš 4. *Atsakymas.* Yra 25 vienodi nariai.

5. Tiriame, ar $\angle A < 90°$, t. y. ar $a^2 < b^2 + c^2$, kai $a^3 = b^3 + c^3$; kitaip, ar $a^6 < (b^2 + c^2)^3$, kai $a^6 = (b^3 + c^3)^2$. Vadinasi, turime išsiaiškinti, ar gali būti teisinga nelygybė $(b^3 + c^3)^2 < (b^2 + c^2)^3$. Kadangi iš nelygybės $(b^3 + c^3)^2 < (b^2 + c^2)^3$ išplaukia $b^2 - 2b\frac{c}{3} + c^2 > 0$ ir $(b - \frac{c}{3})^2 + \frac{8}{9}c^2 > 0$ su visais b ir c, tai $\angle A$ gali būti smailusis.

Dabar tikriname, ar $\angle A \geqslant 90°$, t. y. ar $a^2 \geqslant b^2+c^2$, kai $a^3 = b^3+c^3$. Tačiau nelygybė $(b-\frac{c}{3})^2+\frac{8}{9}c^2 \leqslant 0$ neteisinga. Todėl kampas A negali būti nei bukasis, nei statusis.

Atsakymas. Kampas A gali būti tiktai smailusis.

XI klasės užduoties sprendimai

1. Aišku, kad $x \neq 0$ ir $y \neq 0$,

$$\begin{cases} (x+y)\cdot(x^2 - xy + y^2) = 4, \\ \dfrac{x+y}{xy} = 3. \end{cases}$$

Pažymėkime $x + y = u$ ir $xy = v$. Tada

$$x^2 - xy + y^2 = (x^2 + 2xy + y^2) - 3xy = u^2 - 3v$$

ir sistema tampa tokia:

$$\begin{cases} u\cdot(u^2 - 3v) = 4, \\ u = 3v. \end{cases}$$

Įrašę į pirmąją lygtį $3v = u$, gauname:

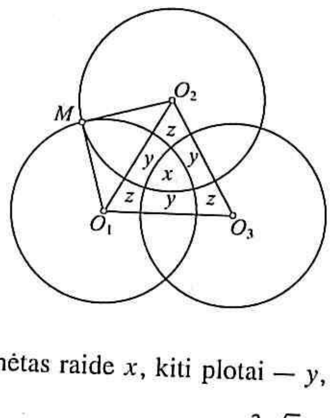
$$u^3 - u^2 = 4, \qquad u^3 - 8 - (u^2 - 4) = 0, \qquad (u-2)(u^2 + u + 2) = 0.$$

Iš čia $u = 2$ ir tuomet $v = \frac{2}{3}$. Sistemos

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ x\cdot y = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

sprendiniai yra $(1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}; 1 \mp \frac{\sqrt{3}}{3})$. *Atsakymas.* Lygčių sistema turi du sprendinius $(1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}; 1 \mp \frac{\sqrt{3}}{3})$.

2. Kadangi $\angle O_1MO_2 = 90°$, tai $O_1O_2 = r\sqrt{2}$.



Brėžinyje ieškomasis plotas pažymėtas raide x, kiti plotai — y, z. Tuomet $\Delta O_1O_2O_3$ plotas lygus

$$x + 3y + 3z = \frac{r^2\sqrt{3}}{2}. \qquad (1)$$

Vieno skritulio išpjovos ($\frac{1}{6}$) dalies plotas

$$x + 2y + z = \frac{\pi r^2}{6}. \qquad (2)$$

Dviejų skritulių bendrosios dalies pusės (arba skritulio nuopjovos) plotas lygus

$$x+y=\frac{\pi r^2}{4}-\frac{r^2}{2}. \tag{3}$$

Iš (1) lygybės išreiškiame $x=\frac{r^2\sqrt{3}}{2}-3(y+z)$ ir (3) įrašome į (2) lygybę:

$$y+z=\frac{\pi r^2}{6}-\left(\frac{\pi r^2}{4}-\frac{r^2}{2}\right).$$

Tada $x=\frac{r^2}{4}(\pi+2\sqrt{3}-6)$.

Atsakymas. $\frac{r^2}{4}(\pi+2\sqrt{3}-6)$.

3. Pagal sąlygą $SAUSAS=101\cdot N$.

1) N — ne triženklis skaičius, nes $101\cdot N$ yra šešiaženklis skaičius tik tada, kai $N=991,\ldots,999$. Tačiau tuomet netinka nė viena sandauga $101\cdot N$.

2) N — keturženklis skaičius: $N=XYAS$. Tada $SAUSAS=XYAS\cdot 101$, arba

$$\begin{aligned}S\cdot 10^5+A\cdot 10^4+U\cdot 10^3+S\cdot 10^2+A\cdot 10+S&=\\=(X\cdot 10^3+Y\cdot 10^2+A\cdot 10+S)\cdot(10^2+1)&=\\=X\cdot 10^5+Y\cdot 10^4+(A+X)\cdot 10^3+(S+Y)\cdot 10^2+A\cdot 10+S.&\end{aligned}$$

Koeficientai prie 10^5: $X=S$; prie 10^2: $S+Y=S$, todėl $Y=0$.

Tikriname:

$$\begin{array}{r} SOAS\\ \times\quad 101\\ \hline SOAS\\ +\ SOAS\\ \hline SAUSAS\end{array}$$

Aišku, kad skaičius $S+A\geqslant 10$. Tačiau koeficientas prie 10^4: $A=0+1=1$. Taigi $S+1\geqslant 10$, arba $S\geqslant 9$. Vadinasi, $S=9$ ir skaitmuo $U=0$.

Atsakymas. 910919.

4. Kadangi $a>0$ ir $b>0$, tai aišku, kad $1-b>0$. Tada $\sqrt{a\cdot(1-b)}>\frac{1}{2}$. Toliau galimi įvairūs sprendimo būdai.

1) Palyginę dviejų skaičių a ir $(1-b)$ aritmetinį ir geometrinį vidurkius, gauname

$$\frac{a+(1-b)}{2}\geqslant\sqrt{a\cdot(1-b)}>\frac{1}{2},\qquad a+1-b>1,\qquad a-b>0.$$

2) *Kretingos Jurgio Pabrėžos gimnazijos mokinio Arvydo Norvaišo sprendimas.*

Pertvarkome nelygybę $a>\frac{1}{4(1-b)}$ ir lyginame b ir $\frac{1}{4(1-b)}$. Aišku, kad

$$b\leqslant\frac{1}{4(1-b)},\quad\text{nes}\quad 4b(1-b)\leqslant 1,\quad 4b^2-4b+1\geqslant 0,\quad (2b-1)^2\geqslant 0.$$

Taigi $\frac{1}{4(1-b)}\geqslant b$ ir $a>b$.

3) *Visagino „Atgimimo" gimnazijos mokinės Julianos Romoslavskajos sprendimas.*

Iš pertvarkytos nelygybės $a>\frac{1}{4(1-b)}$ abiejų pusių atimame b:

$$a-b>\frac{1}{4(1-b)}-b,\qquad a-b>\frac{(2b-1)^2}{4(1-b)}\geqslant 0,\qquad a>b.$$

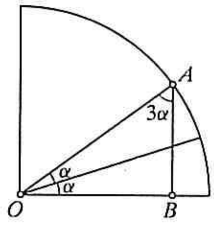
4) *KTU gimnazijos mokinio Alberto Zinevičiaus sprendimas.*

Nelygybė įrodoma prieštaros metodu.

Tarkime, kad $b\geqslant a$, t. y. $b=a+\alpha$, $\alpha\geqslant 0$. Tuomet nelygybę $a\cdot(1-a-\alpha)>\frac{1}{4}$ pertvarkome į ekvivalenčią nelygybę $(a^2-a+\frac{1}{4})+a\cdot\alpha<0$, arba $(a-\frac{1}{2})^2+a\cdot\alpha<0$. Bet to negali būti, nes kairiojoje nelygybės pusėje yra teigiama suma.

Atsakymas. $a>b$.

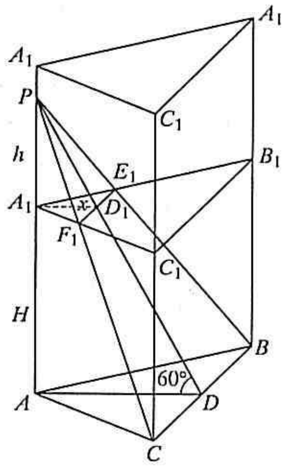
5. Kai $\alpha = 18°$, iš stačiojo $\triangle ABO$ išplaukia $\sin 2\alpha = \cos 3\alpha$, arba $2\sin\alpha\cos\alpha = \cos\alpha \cdot \cos 2\alpha - \sin\alpha \cdot \sin 2\alpha$.
Padaliję iš $\cos\alpha \neq 0$, gauname $2\sin\alpha = \cos 2\alpha - 2\sin^2\alpha$, arba $\sin\alpha = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$, ir $\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.



Atsakymas. $\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

XII klasės užduoties sprendimai

1. Prizmės $ABCA_1B_1C_1$ aukštinė $AA_1 = H$. Nagrinėjame du atvejus.
1) H yra toks, kad pjūvyje gaunama trapecija BCF_1E_1, kurios pagrindai yra a ir b, o aukštinė lygi DD_1. Prizmės pagrindo aukštinė $AD = l = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
Pažymėkime $D_1E_1 = \frac{b}{2}$ ir $A_1D_1 = x$. Iš $\triangle A_1D_1E_1$ gauname $x^2 = b^2 - (\frac{b}{2})^2$ ir $x = \frac{b\sqrt{3}}{2}$, o $b^2 = \frac{4}{3}x^2$. Kampas $\angle APD = 30°$, todėl $PD = 2l$ ir $PD_1 = 2x$. Pažymėję $A_1P = h$, iš $\triangle A_1PD_1$ gauname $h^2 = 4x^2 - x^2$ ir $x^2 = \frac{h^2}{3}$, o iš $\triangle APD$ gauname $(H+h)^2 = 4l^2 - l^2$, $H + h = l\sqrt{3} = \frac{3a}{2}$ ir $h = \frac{3a}{2} - H$.
Kai $H \leqslant \frac{3a}{2}$, pjūvio (trapecijos) aukštinė $DD_1 = 2l - 2x = a\sqrt{3} - b\sqrt{3}$, o trapecijos plotas

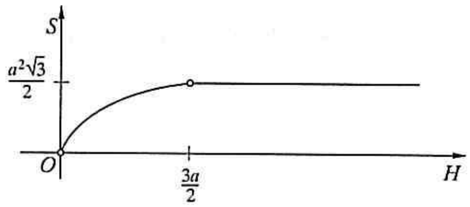


$$S = \frac{a+b}{2} \cdot DD_1 = \frac{a+b}{2} \cdot (a-b)\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}(a^2 - b^2) = \frac{\sqrt{3}}{2}\Big(a^2 - \frac{4}{3}x^2\Big) =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\Big(a^2 - \frac{4}{3} \cdot \frac{h^2}{3}\Big) = \frac{\sqrt{3}}{2}\Big(a^2 - \frac{4}{9}\Big(\frac{3a}{2} - H\Big)^2\Big) = \frac{2\sqrt{3}}{9}(3aH - H^2).$$

2) Kai $H \geqslant \frac{3a}{2}$, trikampio pjūvio plotas $S = \frac{a \cdot DP}{2} = \frac{a \cdot 2l}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Taigi

$$S = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{3}}{9}(3aH - H^2), & \text{kai } 0 < H \leqslant \dfrac{3a}{2}, \\ \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}, & \text{kai } H \geqslant \dfrac{3a}{2}. \end{cases}$$

Funkcijos $S = S(H)$ grafiką sudaro parabolės lankas ir pustiesė.



2. Pažymėkime

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} = N.$$

Tada

$$C_N^2 = \frac{N(N-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{n^2 - n - 2}{4}.$$

Tiriamos lygybės kairėje esanti suma lygi

$$\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{n^2-n-2}{4}=\frac{n(n-1)}{2}\left[1+\frac{n^2-n-2}{4}\right]=\frac{n(n-1)(n^2-n+2)}{8}.$$

Lygybės dešinėje

$$C^2_{N+1}=\frac{(N+1)N}{2}=\frac{(n^2-n+2)n(n-1)}{8}.$$

3. Apibrėžimo sritis: $\cos x>0$. Nagrinėjame du atvejus:
1) $\cos x=1\Rightarrow x=2\pi n;\ n\in \mathbf{Z}$.
2) $\sin^2 x-\frac{3}{2}\sin x+\frac{1}{2}=0$,
$\sin x=\frac{3}{4}\pm\sqrt{\frac{9}{16}-\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}\pm\frac{1}{4}$,
$(\sin x)_1=1\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$ (netinka, nes tada būtų $\cos x=0$).
$(\sin x)_2=\frac{1}{2}\Rightarrow x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$, tačiau $\cos x>0$, tai tinka tiktai $k=2l$:
$x=\frac{\pi}{6}+2\pi l,\ l\in\mathbf{Z}$.

Atsakymas. $x=2\pi n,\ n\in\mathbf{Z};\ x=\frac{\pi}{6}+2\pi l,\ l\in\mathbf{Z}$.

4. $(\underbrace{99\ldots9}_{n})^3=(10^n-1)^3=10^{3n}-3\cdot10^{2n}+3\cdot10^n-1=A-B$;

$$\begin{array}{rr} A=1\underbrace{0\ldots0}_{n}\underbrace{0\ldots0}_{n}\underbrace{0\ldots0}_{n} \\ + \qquad 3\underbrace{0\ldots0}_{n} \\ \hline 1\underbrace{0\ldots0}_{n}\underbrace{0\ldots0}_{n-1}3\underbrace{0\ldots0}_{n} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rr} B=3\underbrace{0\ldots0}_{n}\underbrace{0\ldots0}_{n} \\ + \qquad 1 \\ \hline 3\underbrace{0\ldots0}_{n}\underbrace{0\ldots0}_{n-1}1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} A-B=1\underbrace{0\ldots0}_{n}\underbrace{0\ldots0}_{n-1}3\underbrace{0\ldots0}_{n} \\ - \qquad 3\underbrace{0\ldots0}_{n}0\underbrace{0\ldots0}_{n-1}1 \\ \hline \underbrace{9\ldots9}_{n-1}7\underbrace{0\ldots0}_{n-1}2\underbrace{9\ldots99}_{n} \end{array}$$

Taigi skaičiaus $(\underbrace{99\ldots9}_{n})^3=A-B$ skaitmenų suma lygi $9(n-1)+7+2+9\cdot n=9\cdot n+9\cdot n=18n$.

Atsakymas. $18n$.

5. Nagrinėjame $f(x)=(1+x)^t-(1+xt)$, kurios reikšmė $f(0)=0$. Jos išvestinė lygi $f'(x)=t\cdot(1+x)^{t-1}-t=t\cdot\big((1+x)^{t-1}-1\big)$.
Jei $x>0$, tada:
1) $f'(x)<0$, kai $0<t<1$,
2) $f'(x)>0$, kai $t>1$.
Taigi 1) atveju $f(x)$ mažėja:

$$f(x)<f(0),\quad (1+x)^t-(1+xt)<0,\quad (1+x)^t<1+xt;$$

2) atveju $f(x)$ didėja:

$$f(x)>f(0),\quad (1+x)^t-(1+xt)>0,\quad (1+x)^t>1+xt.$$

Kai $t=1$, aišku, kad $1+x=1+x$.

PROF. J. MATULIONIO XIV KONKURSO NUGALĖTOJAI

VIII klasė

I vieta
Deirūnas Visockas (18,5 t.), Kauno J. Jablonskio gimnazija

IX klasė

I vieta
Jonas Šukys (19 t.), KTU gimnazija
Audrius Židonis (19 t.), KTU gimnazija
Gytis Jankevičius (18,5 t.), KTU gimnazija
Daumilas Ardickas (18,5 t.), VTGTM licėjus
Denisas Zykas (18,5 t.), Visagino „Gerosios vilties“ gimnazija

II vieta
Austė Juronytė (17 t.), KTU gimnazija

III vieta
Darius Sabas (16 t.), KTU gimnazija
Kęstutis Jorudas (15 t.), KTU gimnazija

X klasė

I vieta
Tadas Varanavičius (20 t.), KTU gimnazija
Vytautas Stepanauskas (19 t.), VTGTM licėjus

II vieta
Agnė Bingelytė (17,5 t.), VTGTM licėjus
Inga Trainavičiūtė (17,5 t.), VTGTM licėjus
Maksim Jeskevič (17 t.), Visagino „Gerosios vilties“ vid. m-kla

III vieta
Andžej Ziminskij (15 t.), Vilniaus J. Pauliaus II vid. m-kla

XI klasė

III vieta
Arvydas Norvaišas (16 t.), Kretingos J. Pabrėžos gimnazija

XII klasė

I vieta
Andrius Stankevičius (19 t.), KTU gimnazija

II vieta
Žymantas Darbėnas (17 t.), KTU gimnazija
Svetlana Fiodorova (17 t.), Visagino „Atgimimo“ gimnazija
Matas Šileikis (17 t.), Vilniaus „Minties“ gimnazija

III vieta
Andrius Velykis (16,5 t.), KTU gimnazija
Viktor Novičenko (16,5 t.), Zarasų „Ąžuolo“ gimnazija