$\alpha + \omega$, 2002, Nr. 3, 62–70

Šiame žurnalo numeryje skelbiame kelių matematikos olimpiadų, kuriose 2002 metais dalyvavo mūsų šalies moksleiviai, uždavinius.

IV individualioji Lietuvos jaunesniųjų klasių moksleivių olimpiada

V–VI klasės

α. 305

Iš aštuonių skaičių 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 eilės išbraukus 1, 3, 5, 6 ir 7, likusių skaičių 2, 4 ir 8 sandauga $2 \cdot 4 \cdot 8 = 64$ būtų lygi $8 \cdot 8$, t. y. tikslus kvadratas. Kiek mažiausiai skaičių reikėtų išbraukti iš eilės, kad likusių skaičių sandauga būtų tikslus kvadratas?

α. 306

Skiautę popieriaus galima suplėšyti į 8 arba į 12 dalių. Kiekvieną gautąją skiautę vėl galima suplėšyti į 8 arba į 12 skiaučių ir t. t. Ar taip plėšant kada nors įmanoma gauti:

a) 60 skiaučių; b) 61 skiautę; c) 2002 skiautes?

Ar galima visus skaičius nuo 1 iki 10 surašyti apskritimu taip, kad bet kurių dviejų kaimyninių skaičių skirtumas būtų ne mažesnis kaip 4?

α. 308

Penkis skaičius visais galimais būdais sudėjus po 3, gautos tokios sumos: 10, 14, 15, 16, 17, 17, 18, 21, 22, 24. Raskite tuos penkis skaičius.

VII–VIII klasės

α. 309

Iš skaičių 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 ir 16 eilės išbraukus 4, 8, 10, 14 ir 16, likusių skaičių 2, 6 ir 12 sandauga būtų lygi $144 = 12 \cdot 12$, t. y. tikslus kvadratas. Kiek mažiausiai skaičių reikėtų išbraukti iš tos eilės, kad likusių skaičių sandauga būtų tikslus kvadratas?

α. 310

Duota lygtis $3xy - x - 2y = 8$. Raskite:

a) vieną sveikųjų skaičių porą $(x; y)$, tenkinančią šią lygtį;

b) dvi sveikųjų skaičių poras, tenkinančias šią lygtį;

c) tris sveikųjų skaičių poras, tenkinančias šią lygtį;

d) visas šios lygties sveikųjų sprendinių poras.

α. 311

Trapecija vadinamas keturkampis, kurio dvi priešingos kraštinės yra lygiagrečios, o kitos dvi ne. Lygiašonę trapeciją jos įstrižainė dalija į du lygiašonius trikampius. Raskite tos trapecijos kampus.

α. 312

◊◊◊

Simboliu $S(n)$ žymime natūraliojo skaičiaus n skaitmenų sumą, pavyzdžiui, $S(129) = 1 + 2 + 9 = 12$. Skaičius n ir m vadiname giminingais, jei $n + S(n) = m + S(m)$. Raskite du giminingus skaičius. Nustatykite, ar egzistuoja:

a) trys tarpusavyje giminingi skaičiai;

b) 23 tarpusavyje giminingi skaičiai.

IV komandinė Pasvalio krašto moksleivių matematikos olimpiada Jaunesniųjų klasių grupė

α. 313

◊◊◊

Pavaizduokite plokštumoje geometrinę vietą taškų $(x; y)$, tenkinančių nelygybę

$$\min(x, y) \geqslant 1; \text{ čia } \min(x, y) = \begin{cases} x, & \text{jei } x \leqslant y, \\ y, & \text{jei } y < x. \end{cases}$$

α. 314

◊◊◊

Iš lygybės $3^2 + 4^2 = 5^2$ išplaukia, kad 5×5 kvadratą galima supjaustyti į baigtinį skaičių dalių, iš kurių galima sudaryti 4×4 ir 3×3 kvadratus. Raskite minimalų tokių dalių skaičių.

α. 315

◊◊◊

Irkluodamas statmenai upės srovei, sportininkas nuplaukė į kitą krantą per 10 min. Po to jis 50 min. irklavo išilgai kranto prieš srovę, vėl perplaukė upę (irkluodamas statmenai upės srovei) ir 20 min. irkluodamas išilgai kranto grįžo į pradinę vietą. Koks irkluotojo greičio ramiame vandenyje ir upės greičio santykis?

α. 316

◊◊◊

Skaičius $a + \frac{1}{a}$ yra natūralusis. Įrodykite, kad skaičius $a^3 + \frac{1}{a^3}$ taip pat yra natūralusis.

α. 317

◊◊◊

Jonas ir Agnė kalbasi:

Agnė: Kokio amžiaus tavo vaikai?

Jonas: Visų trijų vaikų metų sandauga lygi 36.

Agnė: Man dar ne viskas aišku.

Jonas: Jų amžių suma tokia pat kaip tavo namo numeris.

Agnė: Vis dėlto dar trūksta informacijos.

Jonas: Turinčio daugiausiai metų plaukai rudi.

Agnė: O! Dabar jau žinau.

Nustatykite, kiek metų turi Jono vaikai.

α. 318

◊◊◊

Tegu k ir m yra natūralieji skaičiai. Įrodykite, kad skaičius k^2+m^2 dalijasi iš 7 tada ir tik tada, kai k ir m dalijasi iš 7.

α. 319

◊◊◊

Įrodykite, kad $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} = 9.$

α. 320

◊◊◊

Visi skaičiai nuo 1 iki milijono surašyti į vieną eilę. Kiek skaitmenų yra toje eilėje?

α. 321

◊◊◊

Įrodykite, kad yra sveikųjų skaičių pora $(x; y)$, tenkinanti lygtį $x^2 - y^2 = a^3$, kurioje a yra natūralusis skaičius.

α. 322

◊◊◊

Įrodykite, kad $a + b + c \geqslant \sqrt{bc} + \sqrt{ca} + \sqrt{ab}$, kai $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$.

Vyresniųjų klasių grupė

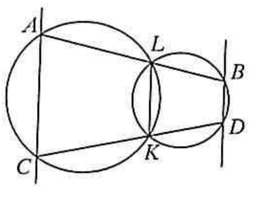
α. 323

◊◊◊

Tegu $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_{k+2} = x_k + x_{k+1}$, $k \geqslant 1$, yra Fibonačio skaičiai. Įrodykite, kad su visais $n \geqslant 1$ skaičius x_{5n} dalijasi iš 5.

α. 324

◊◊◊



Du apskritimai kertasi taškuose K ir L, o tiesės, išvestos per tuos taškus, kerta vieną apskritimą taškuose A ir C, o kitą — taškuose B ir D. Įrodykite, kad tiesės, išvestos per taškus A ir C bei B ir D, yra lygiagrečios.

α. 325

◊◊◊

Keli daugai sėdi už apskrito stalo. Kiekvienas iš jų turi tam tikrą skaičių litų. Pirmasis turi vienu litu daugiau negu antrasis, šis vienu daugiau už trečiąjį ir t. t. Pirmas duoda litą antrajam, po to antrasis du litus trečiajam ir t. t. Taigi kiekvienas duoda vienu litu daugiau negu gavo ir procesas tęsiamas tol, kol kuris nors nebeturės ko pridėti. Pasibaigus dalyboms, buvo du kaimynai, kurių vienas turėjo 4 kartus daugiau litų negu kitas. Kiek žmonių sėdėjo už stalo ir kiek litų pradžioje turėjo pats neturtingiausias žmogus?

α. 326

◊◊◊

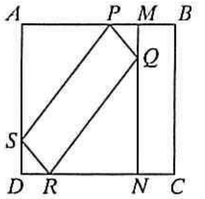
Raskite mažiausią teigiamą sveikąjį skaičių, turintį tokią savybę: jo pirmasis skaitmuo lygus 1, o perkėlus šį skaitmenį į galą, gaunamas tris kartus didesnis skaičius.

α. 327
◇◇◇

Kritiniu namo aukštu pavadinkime aukštą, iš kurio išmetus vazą, ši sudūžta, o išmetus iš žemesnio aukšto, ji nedūžta. Yra dvi vienodos vazos ir žinoma, kad kritinis aukštas yra tarp 1 ir 36 (imtinai). Kokį minimalų skaičių kartų reikia mesti vazas, kad kritinio aukšto nustatymas būtų garantuotas?

α. 328
◇◇◇

Įrodykite, kad $nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$ dalijasi iš $(x-1)^2$ be liekanos.



α. 329
◇◇◇

Duotas vienetinis kvadratas $ABCD$ ir žinoma, kad stačiakampis $MBCN$ lygus stačiakampiui $PQRS$. Raskite stačiakampio $MBCN$ kraštines.

α. 330
◇◇◇

Koridoriuje yra 1024 sunumeruotos iš eilės dėžutės su durelėmis. Mokinys atidaro pirmąją dėžutę, praleidžia antrąją, atidaro trečiąją, praleidžia ketvirtąją ir t. t. Pasiekęs galą, apsisuka, atidaro pirmąją neatidarytą (t. y. 1024-ąją) dėžutę ir eina atgal, vėl atidarinėdamas kas antrą iš neatidarytų dėžučių. Pasiekęs galą, vėl apsisuka ir viskas prasideda iš naujo. Jis vaikšto tol, kol atidaro visas dureles. Koks paskutinės atidarytos dėžutės numeris?

α. 331
◇◇◇

Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} 5[x] + 2[y] = 19, \\ 3x + 4y = 21; \end{cases}$$

čia $[x]$ yra skaičiaus x sveikoji dalis.

α. 332
◇◇◇

Raskite funkciją $f(x)$, kuri su visais realiaisiais skaičiais x tenkina lygtį

$$2f(x) + f(1-x) = x^2.$$

III individualioji Raseinių krašto olimpiada
2002 12 10

α. 333
◇◇◇

Keturios raseiniškės mergaitės — Kristina, Liucija, Magdutė ir Neringa dainavo dainas koncerte. Kiekvieną dainą dainavo 3 mergaitės. Kristina sudainavo 11 dainų — daugiau už visas kitas, o Magdutė tik 8 — mažiau už visas kitas mergaites. Kiek dainų mergaitės sudainavo iš viso?

α. 334

◊◊◊

Sveikasis teigiamas skaičius baigiasi 19, dalijasi iš 19, o jo skaitmenų suma taip pat lygi 19.
Raskite:

a) bent vieną tokį skaičių;
b) nors vieną tokį skaičių, didesnį už 1 000 000, kad nė vienas jo skaitmuo nebūtų 0;
b) mažiausią tokį skaičių.

α. 335

◊◊◊

Du žaidėjai pakaitomis į 6 langelių lentelę 6×1 įrašo po skaitmenį, kol užpildo visus 6 langelius ir gauna šešiaženklį skaičių. (Bet kuriuo momentu bet kuriam žaidėjui leidžiama įrašyti į bet kurį langelį bet kurį iš skaitmenų.) Ar gali antras žaidėjas pasiekti, kad gautasis skaičius dalytųsi be liekanos iš 11?

α. 336

◊◊◊

Išspręskite lygčių sistemą $\begin{cases} x^2 = \frac{13}{2}x - \frac{3}{2}y, \\ y^2 = -\frac{3}{2}x + \frac{13}{2}y. \end{cases}$

α. 337

◊◊◊

Iškilojo keturkampio $ABCD$ kampai prie viršūnių A ir C yra statūs, $BC = CD$ ir $AB + AD = 8$. Raskite keturkampio $ABCD$ plotą.

III komandinė Raseinių krašto olimpiada 2002 12 10

α. 338

◊◊◊

Penkiaženklį skaičių $SABAS$ padauginus iš 99 999, paaiškėjo, kad paskutiniai trys sandaugos skaitmenys yra 205. Kas yra $SABAS$?

A 49 794 **B** 58 785 **C** 59 795 **D** 68 786 **E** 99 999

α. 339

◊◊◊

Keturženklio skaičiaus $abcd$ dalyba „kampu“ iš dviženklio skaičiaus cd atrodo taip:

$$\begin{array}{l|l} abcd & cd \\ \underline{cd} & bcd \\ \;ec & \\ \;\underline{df} & \\ \;bcd & \\ \;\underline{bcd} & \\ \quad 0 & \end{array}$$

Kam yra lygus skaičius b?

A 1 **B** 2 **C** 4 **D** 5 **E** 7

α. 340
◊◊◊

Palindromu vadiname tokį skaičių, kuris nesikeičia, ar jį skaitytume iš dešinės į kairę, ar iš kairės į dešinę (pavyzdžiui, 58 285). Kiek yra tokių penkiaženklių palindromų, kurie dalijasi iš 9?

A 81 **B** 90 **C** 100 **D** 500 **E** 1000

α. 341
◊◊◊

Kiek yra tokių natūraliųjų mažesnių už 100 000 skaičių, kurie baigiasi 13, dalijasi iš 13 ir kurių skaitmenų suma lygi 13?

A 2 **B** 3 **C** 4 **D** 5 **E** 6

α. 342
◊◊◊

Septyniakampio viršūnėse surašomi 7 skirtingi natūralieji skaičiai taip, kad bet kurių dviejų kaimyninių skaičių suma būtų ne didesnė kaip 12. Kokia yra pati didžiausia galima visų tų 7 skaičių suma?

A 36 **B** 37 **C** 38 **D** 39 **E** 42

α. 343
◊◊◊

Žodžio $RASEINIAI$ pirmoji, trečioji ir šeštoji raidės yra priebalsės, o likusios raidės yra balsės. Keliais būdais galima taip perstatyti žodžio $RASEINIAI$ raides, kad tose vietose, kur buvo balsės, ir liktų balsės, o ten, kur buvo priebalsės, ir liktų priebalsės?

A 2880 **B** 4320 **C** 4520 **D** 5040 **E** 5041

α. 344
◊◊◊

Jeigu x ir y yra tokie sveikieji skaičiai, kad $x^2 + 23 = y^2$, tai kam gali būti lygus $x^3 - y^3$?

A 54 **B** 720 **C** 273 **D** -397 **E** teisingas kitas atsakymas

α. 345
◊◊◊

Iškilojo keturkampio $ABCD$ kampai A ir B yra statūs, o to keturkampio plotas yra 3 kartus didesnis už trikampio ACB plotą. Koks yra trikampių ADB ir trikampio ACB plotų santykis?

A 2 **B** $\frac{3}{2}$ **C** 1 **D** $\frac{5}{2}$ **E** $\sqrt{2}$

α. 346
◊◊◊

Kokiu didžiausiu skaičiumi nulių gali baigtis trijų sveikųjų teigiamų skaičių sandauga, jeigu tų skaičių suma yra 695?

A 4 **B** 5 **C** 6 **D** 7 **E** 8

α. 347
◊◊◊

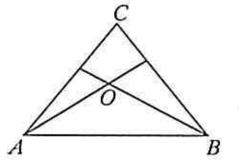
Sveikieji teigiami skaičiai a ir b yra tokie, kad $5a^2 = 2b^5$. Kokia yra pati mažiausia galima tokių skaičių a ir b suma?

A 110 **B** 160 **C** 180 **D** 200 **E** 210

Baltijos valstybių sostinių pirmųjų gimnazijų olimpiada
Vilnius, 2002 11 27
X klasė

α. 348
◇◇◇

Natūralusis skaičius m dalijasi iš 17. Kokią mažiausiąją reikšmę gali įgyti skaičiaus m skaitmenų suma?



α. 349
◇◇◇

Kirstinės, išvestos per trikampio ABC viršūnes A ir B, kertasi taške O, kuris kiekvieną kirstinę, skaičiuojant nuo viršūnės, dalija santykiu $k : 1$. Kokias reikšmes gali įgyti k?

α. 350
◇◇◇

Įrodykite, kad $2^{22} + 5^{24}$ yra sudėtinis (ne pirminis) skaičius.

α. 351
◇◇◇

Išspręskite lygčių sistemą $\begin{cases} a^2 + b^2 = 13, \\ 2ab + 5b = 27. \end{cases}$

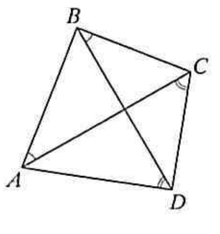
α. 352
◇◇◇

Lentoje surašomi visi skaičiai nuo 1 iki 100. Du žaidėjai pakaitomis išbraukinėja juos po vieną tol, kol lentoje lieka tik du skaičiai. Tada tie du skaičiai yra sudedami. Jei gautoji suma dalijasi iš 3, tai laimi pirmas žaidėjas, jeigu ne — antrasis. Kuris žaidėjas — pirmasis ar jo varžovas, teisingai žaisdamas, laimi?

XI klasė

α. 353
◇◇◇

Kokių septynženklių skaičių yra daugiau: tokių, kurių dešimtainiame užraše yra vienetas, ar tokių, kur jo nėra?



α. 354
◇◇◇

Keturkampis $ABCD$ yra iškilasis. $\angle CBD = \angle CAB$, $\angle ACD = \angle BDA$. Įrodykite, kad $\angle ABC = \angle ADC$.

α. 355
◇◇◇

Reikia pervežti 50 konteinerių, sveriančių atitinkamai 150 kg, 151 kg, 152 kg, ... , 197 kg, 198 kg, 199 kg. Kiek mažiausiai sunkvežimių, galinčių vežti po 1100 kg, reikėtų turėti, kad galima būtų iš karto pervežti visus konteinerius?

α. 356

◊◊◊

Ar galima iš aibės $\{1, 2, 3, \ldots, 13, 14, 15\}$ išrinkti du tokius skirtingus skaičius, kad jų sandauga būtų lygi likusiųjų skaičių sumai?

α. 357

◊◊◊

Išspręskite lygčių sistemą $\begin{cases} (x-y)(x^2+y^2)=41, \\ (x+y)(x^2-y^2)=81. \end{cases}$

XII klasė

α. 358

◊◊◊

Įrodykite, kad $\sin 15^\circ \sin 40^\circ \sin 75^\circ = \sin 20^\circ \sin 30^\circ \sin 70^\circ$.

α. 359

◊◊◊

Trapecijos $ABCD$ pagrindai yra AD ir BC, kampas A yra status, taškas E yra trapecijos įstrižainių sankirtos taškas, o F yra taško E projekcija kraštinėje AB. Įrodykite, kad kampai DFE ir CFE yra lygūs.

α. 360

◊◊◊

Plokštumoje paimta keletas tokių taškų, tarp kurių visi atstumai yra skirtingi. Kiekvienas taškas jungiamas su jam artimiausiu tašku. Ar gali atsitikti taip, kad jungdami taškus nurodytu būdu gautume uždarą daugiakampį, kurio viršūnė būtų visi nurodyti taškai arba tik kai kurie iš jų?

α. 361

◊◊◊

Ar galima būtų rasti 16 tokių skaičių, kad bet kurių septynių iš eilės einančių skaičių suma būtų neigiama, o bet kurių 11 iš eilės einančių skaičių suma būtų teigiama?

α. 362

◊◊◊

Raskite visus sveikuosius skaičius x, y ir z, kad

$$x(x-2y+z)+y(y-2z+x)+z(z-2x+y)=1.$$

43-oji pasaulinė matematikos olimpiada Glazgovas, 2002 metai

α. 363

◊◊◊

Tegu S yra aibė visų neneigiamų sveikųjų skaičių porų (h, k), tenkinančių sąlygą $h+k<n$. Tarkime, visos S poros yra nuspalvintos raudonai arba mėlynai. Be to: jei pora (h, k) nuspalvinta raudonai ir $h' \leqslant h, k' \leqslant k$, tai ir pora (h', k') yra nuspalvinta raudonai. Aibės S poaibį vadiname pirmojo tipo poaibiu, jeigu jame yra n mėlynų porų, kurių visi pirmieji elementai skirtingi. Aibės S poaibį vadiname antrojo tipo poaibiu, jeigu jame yra n mėlynų porų, kurių visi antrieji elementai skirtingi. Įrodykite, kad pirmojo ir antrojo tipo poaibių yra tiek pat.

α. 364

◊◊◊

Taškas O yra apskritimo centras, o BC yra jo skersmuo. Tegu A yra bet koks apskritimo taškas, tenkinantis sąlygą $\angle AOC > 60°$. Styga EF yra statmena spinduliui AO ir dalija jį pusiau. Tegu D yra mažesniojo lanko AB vidurio taškas. Tiesė, einanti per apskritimo centrą O lygiagrečiai su AD, kerta stygą AC taške J. Įrodykite, kad taškas J yra įbrėžtojo į trikampį ECF apskritimo centras.

α. 365

◊◊◊

Raskite visas natūraliųjų skaičių poras $m > 2, n > 2$, kurioms egzistuotų be galo daug natūraliųjų k, kad skaičius $k^m + k - 1$ dalytųsi iš $k^n + k^2 - 1$.

α. 366

◊◊◊

Tegu natūraliojo skaičiaus $n > 1$ visi dalikliai yra skaičiai $d_1 < d_2 < \cdots < d_k$, taigi $d_1 = 1, d_k = n$. Pažymėkime $d = d_1d_2 + d_2d_3 + \cdots + d_{k-1}d_k$. Įrodykite, kad $d < n^2$, ir raskite visus tuos n, kuriems n^2 dalijasi iš d.

α. 367

◊◊◊

Raskite visas funkcijas, apibrėžtas realiųjų skaičių aibėje ir įgyjančias realias reikšmes, kad su visais x, y, u, v būtų teisinga lygybė

$$\big(f(x) + f(y)\big)\big(f(u) + f(v)\big) = f(xu - yv) + f(xv + yu).$$

α. 368

◊◊◊

Plokštumoje nubraižyta n vienetinių apskritimų taip, kad jokia plokštumos tiesė nekerta daugiau kaip dviejų apskritimų. Tegu $O_1, O_2, \ldots, O_n$ yra šių apskritimų centrai. Įrodykite, kad

$$\sum_{i<j} \frac{1}{O_iO_j} \leqslant \frac{(n-1)\pi}{3}.$$