$\alpha + \omega$, 2002, Nr. 3, 56–61

Kodėl skaičius e *iracionalus?*

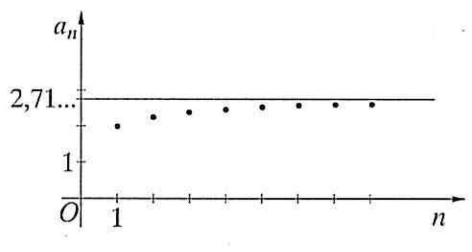
Juozas Mačys
jmacys@ktl.mii.lt

Skaičius e *— vienas svarbiausių matematikoje. Autorius parodo, kad jį apibrėžti, skaičiuoti jo artinius, įrodyti iracionalumą galima naudojantis viena nelygybe.*

Pagrindinis šio straipsnio tikslas — įrodyti, kad skaičius e iracionalus. Taigi straipsnis tęsia ankstesnius autoriaus rašinius žurnale — „Kodėl cos 17° iracionalus?“ [1] ir „Kodėl cos $\frac{180^\circ}{17}$ iracionalus?“ [2]. Juose įrodyta, kad racionalaus laipsnių skaičiaus trigonometrinių funkcijų reikšmės iracionalios (žinoma, išskyrus gerai visiems žinomas reikšmes $\sin 0^\circ$, $\sin 30^\circ$, $\cos 60^\circ$, $\operatorname{tg} 60^\circ$, $\operatorname{tg} 45^\circ$ ir pan.). Todėl tas, kas domisi tik iracionalumo klausimu, gali iš karto peršokti prie 3 skyrelio. Bet tikiuosi, kad skaitytojas aptiks sau šį bei tą įdomaus ir pirmuosiuose skyreliuose. Skaitant tuos įvadinius skyrelius ir norint prisiminti vieną ar kitą teiginį, gali praversti ankstesniųjų metų mokyklinis [3] ir universitetinis [4] vadovėliai.

1. Prisiminkime apibrėžimą

Atsimename, kad skaičius e apibrėžiamas kaip sekos $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ riba. Pirmas klausimas, kuris kyla — ar ta seka tikrai turi ribą (juk ne visos sekos ją turi — prisiminkime seką $a_n = (-1)^n$, t. y. seką -1, 1, ... , kuri, aišku, prie jokio skaičiaus neartėja). Štai jeigu seka monotoniškai didėja ir aprėžta, tai aišku, kad ji ribą turi — užtenka pasižiūrėti į paveikslėlį (beje, jeigu kam to nepakanka, galima remtis Vejerštraso autoritetu, jis tai įrodė griežtai).



Taigi reikia įrodyti, kad seka $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ monotoniškai didėja. Iš pradžių tarsi viskas aišku:

$$a_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2, \qquad a_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2{,}25,$$

$$a_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} = 2{,}37..., \qquad a_4 = \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 = \left(\frac{5}{4}\right)^4 = \frac{625}{256} = 2{,}44...$$

ir t. t. Matome, kad kol kas nariai auga. Apskritai taip skaičiuoti gana malonus užsiėmimas, ypač jei turi kišeninį skaičiuoklį. Nors ir tada galima suabejoti: kai skaičiuoklio tikslumas (na, sakysime, 10^{-10}) baigsis, ką gi daryti tada.

Taigi imkimės monotoniškumo be skaičiuoklio. Išskleiskime a_n remdamiesi Niutono binomu:

$$\begin{aligned}
a_n &= 1 + \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3} + \cdots + \\
&+ \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}\cdot\frac{1}{n^k} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots[n-(n-3)]}{1\cdot 2\cdots(n-2)}\cdot\frac{1}{n^{n-2}} + \\
&+ \frac{n(n-1)\cdots[n-(n-3)][n-(n-2)]}{1\cdot 2\cdots(n-2)(n-1)}\cdot\frac{1}{n^{n-1}} + \frac{n(n-1)\cdots[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdots(n-1)n}\cdot\frac{1}{n^n} = \\
&= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big) + \frac{1}{3!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{2}{n}\Big) + \cdots + \frac{1}{k!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{2}{n}\Big)\cdots\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big) + \\
&+ \cdots + \frac{1}{(n-2)!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{2}{n}\Big)\cdots\Big(1-\frac{n-3}{n}\Big) + \\
&+ \frac{1}{(n-1)!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{2}{n}\Big)\cdots\Big(1-\frac{n-3}{n}\Big)\Big(1-\frac{n-2}{n}\Big) + \\
&+ \frac{1}{n!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{2}{n}\Big)\cdots\Big(1-\frac{n-2}{n}\Big)\Big(1-\frac{n-1}{n}\Big).
\end{aligned} \tag{1}$$

Palyginkime skleidinį su a_{n+1} skleidiniu:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\Big(1-\frac{1}{n+1}\Big) + \frac{1}{3!}\Big(1-\frac{1}{n+1}\Big)\Big(1-\frac{2}{n+1}\Big) + \cdots + \\
&+ \frac{1}{k!}\Big(1-\frac{1}{n+1}\Big)\Big(1-\frac{2}{n+1}\Big)\cdots\Big(1-\frac{k-1}{n+1}\Big) + \cdots + \\
&+ \frac{1}{n!}\Big(1-\frac{1}{n+1}\Big)\Big(1-\frac{2}{n+1}\Big)\cdots\Big(1-\frac{n-1}{n+1}\Big) + \frac{1}{(n+1)^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Pirmi du skleidinių dėmenys lygūs, o kiekvienas iš pirmo skleidinio dėmenų mažesnis už atitinkamą antro skleidinio dėmenį (kiekvieno dėmens atitinkami dauginamieji mažesni). Be to, antrame skleidinyje yra dar vienas teigiamas dėmuo. Vadinasi, $a_n < a_{n+1}$, taigi seka monotoniškai didėja.

Lengviau įrodyti, kad seka a_n aprėžta. Iš tikrųjų, iš (1) skleidinio aišku, kad

$$a_n < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} \doteq b_n \tag{2}$$

(ženklą $\doteq$ galima skaityti kaip žodį „pažymėkime“). Todėl

$$\begin{aligned}
a_n < b_n &= 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{2\cdot 3\cdots(n-1)} + \frac{1}{2\cdot 3\cdots(n-1)n} < \\
&< 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-1}} = \\
&= 2 + \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}\Big) : \Big(1 - \frac{1}{2}\Big) = 2 + \Big(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\Big) < 3.
\end{aligned}$$

Seka a_n monotoniškai didėja ir aprėžta, todėl egzistuoja riba $\lim_{n\to\infty} a_n$. Ją žymime raide e.

Taigi

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n.$$

Jau dabar galima apytiksliai apskaičiuoti e, tačiau remiantis (2) nelygybe a_n galima įvertinti tiksliau:

$$\begin{aligned} a_n < b_n &= 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\dots+\frac{1}{n!} < \\ &< 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4!}\Big(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\dots+\frac{1}{5\cdot 6\cdots n}\Big) < \\ &< 2+\frac{2}{3}+\frac{1}{24}\Big(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\dots+\frac{1}{5^{n-5}}\Big) = 2+\frac{2}{3}+\frac{1}{24}\cdot\frac{1-\frac{1}{5^{n-4}}}{1-\frac{1}{5}} < \\ &< 2+\frac{2}{3}+\frac{1}{24}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{5}} < 2+\frac{2}{3}+\frac{5}{96} < 2{,}7188. \end{aligned}$$

Taigi e $\leqslant 2{,}7188 < 2{,}719$.

Beje, dar ne kartą vartosime žodžius „vertinti“, „vertinti iš viršaus“, „vertinti iš apačios“. Jie suprantami ir be paaiškinimo, bet dėl visa ko pasakysime, kad, pavyzdžiui skaičių e „vertinti iš viršaus“ reiškia parašyti nelygybę e $< c$, kurioje skaičius c dėl vienos ar kitos priežasties patogesnis už e.

Kita vertus, kadangi e $> a_6$, tai

$$\mathrm{e} > \Big(1+\frac{1}{6}\Big)^6 = \Big(\frac{7}{6}\Big)^6 = 2{,}52\ldots, \quad \text{t. y.} \quad \mathrm{e} > 2{,}52.$$

Norint gauti bent vieną tikslų skaitmenį po kablelio, prireikia net a_{100}:

$$\mathrm{e} > a_{100} = \Big(1+\frac{1}{100}\Big)^{100} = (1{,}01)^{100} = 2{,}704\ldots,$$

taigi $2{,}704 < \mathrm{e} < 2{,}719$ ir e $= 2{,}7\ldots$.

Norint gauti du tikslius skaitmenis po kablelio, reikia imti a_{200}:

$$\mathrm{e} > a_{200} = \Big(1+\frac{1}{200}\Big)^{200} = (1{,}005)^{200} = 2{,}711\ldots,$$

taigi $2{,}711 < \mathrm{e} < 2{,}719$ ir e $= 2{,}71\ldots$.

Vėliau matysime, kad yra daug geresnių būdų apskaičiuoti skaičių e dideliu tikslumu.

2. Dar vienas e apibrėžimas

Mūsų laukia malonus siurprizas. Įrodėme, kad sekos $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ nariai tenkina nelygybę

$$a_n < b_n = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}. \tag{2}$$

Deja, iš jos neišplaukia, kad

$$\mathrm{e} < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}.$$

Negana to, parašytoji nelygybė neteisinga, o teisinga būtent priešinga nelygybė:

$$b_n = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{n!} < \mathrm{e}. \tag{3}$$

Ją dabar ir įrodysime.

Grįžkime prie (1) lygybės. Paėmę jos dešiniojoje pusėje tris dėmenis, gauname

$$a_n > 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Ši nelygybė teisinga su visais $n > 2$, todėl galima pereiti prie ribos, kai $n \to \infty$. Gauname

$$e \geqslant 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}.$$

Dabar (1) lygybės dešiniojoje pusėje imkime keturis dėmenis ($n > 3$):

$$a_n > 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right).$$

Vėl pereikime prie ribos, kai $n \to \infty$:

$$e \geqslant 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}.$$

Žinoma, ši lygybė įrodo, kad ankstesnė nelygybė griežta.

Toliau (1) lygybės dešinėje imkime penkis dėmenis ($n > 4$):

$$a_n > 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \frac{1}{4!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{3}{n}\right).$$

Perėję prie ribos, kai $n \to \infty$, gauname

$$e \geqslant 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}.$$

Dabar jau visiškai aišku, kad taip galime pasiekti bet kurį m:

$$e \geqslant 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{m!}.$$

Bet teisinga ir nelygybė

$$e \geqslant 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{m!} + \frac{1}{(m+1)!},$$

todėl vėl ankstesnė nelygybė griežta ir

$$e > 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{m!}$$

su kiekvienu m. Nelygybė (3) įrodyta. Neįtikėtinai subtilus samprotavimas!

Sujungę (2) ir (3) nelygybes, gauname

$$a_n < b_n < e\,.$$

Sekos a_n riba lygi e, todėl perėję nelygybėje prie ribos gauname

$$e \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n \leqslant e,$$

t. y. $\lim_{n\to\infty} b_n = e$. Vadinasi, ne tik sekos a_n, bet ir sekos b_n riba yra e.

$\alpha + \omega$

Įsitikinome, kad skaičių e galima apibrėžti kaip sekos b_n ribą:

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\Big(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\Big).$$

Kokių privalumų turėtų toks apibrėžimas? Pirma, nereikėtų įrodinėti sekos b_n monotoniškumo — sekos a_n monotoniškumo įrodymas nebuvo labai malonus. Antra, nelygybė (3) leidžia daug tiksliau įvertinti e iš apačios: užtenka imti $n = 5$ ir gauname $\mathrm{e} > 2{,}71$.

Vis dėlto matematikoje riba $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$ labai svarbi — nors ir kaip apibrėžtume skaičių e, prie tos ribos norom nenorom tektų sugrįžti.

Nelygybėje (3) skaičių e labai tiksliai įvertinome iš apačios. Mūsų artimiausias uždavinys — panašią nelygybę rasti skaičiui e vertinti iš viršaus.

Jau kelis kartus vertinome b_n (taigi ir a_n) iš viršaus. Pirmą kartą didinant dėmenis pradedant ketvirtuoju mums pavyko įrodyti, kad $b_n < 3$, taigi ir kad $\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} b_n \leqslant 3$. Antrą kartą nelietėme pirmųjų keturių dėmenų, įrodėme, kad $b_n < 2{,}7188$, ir galėjome teigti, kad $\mathrm{e} < 2{,}719$. Tad pabandykime dar kartą vertinti panašiai, tik šį kartą neliesti „daug" pirmųjų narių. Taigi

$$\begin{aligned}
b_{2n} &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \cdots + \frac{1}{(2n)!} = \\
&= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \\
&\quad + \frac{1}{(n+1)!}\Big(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots + \frac{1}{(n+2)(n+3)\cdots(2n)}\Big) < \\
&< 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}\Big(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^{n-1}}\Big).
\end{aligned}$$

Skliausteliuose yra geometrinė progresija, kurios suma

$$\frac{1 - \frac{1}{(n+1)^n}}{1 - \frac{1}{n+1}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n},$$

todėl

$$b_n < b_{2n} < 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!\,n} \doteq c_n = b_n + \frac{1}{n!\,n}.$$

Kuo skiriasi gautasis įvertis nuo ankstesniųjų? Ten dešiniojoje pusėje buvo konkretus skaičius, ir, pavyzdžiui, lygybėje $b_n < 3$ perėję prie ribos darėme išvadą, kad $\lim_{n\to\infty} b_n \leqslant 3$. Dabar mūsų dešinė priklauso nuo n ir reikia naujos idėjos. Anksčiau buvo tiek $a_n < \mathrm{e}$, tiek $b_n < \mathrm{e}$. Dabar mes padidinome b_{2n} — o gal padidinome tiek, kad c_n jau didesnis už e? Ir galėsime vertinti nelygybe $\mathrm{e} < c_n$? Pasirodo, kad tikrai taip. Kadangi c_n ir b_n skiriasi „mažai", $c_n - b_n = \frac{1}{n!\,n}$, tai ir skaičiaus e įvertis bus labai tikslus.

Taigi nagrinėkime seką c_n. Aišku, kad $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}\big(b_n + \frac{1}{n!\,n}\big) = \lim_{n\to\infty} b_n + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!\,n} = \mathrm{e} + 0 = \mathrm{e}$. Bet svarbiausia, kad seka c_n — mažėjanti: $c_n > c_{n+1}$, nes $\frac{1}{n!\,n} > \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!(n+1)} \iff (n+1)^2 > n(n+1) + n \iff n^2 + 2n + 1 > n^2 + 2n$.

Vadinasi, sekos c_n riba $e < c_n$. Todėl

$$b_n < \mathrm{e} < c_n,$$

arba

$$1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} < \mathrm{e} < 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!\,n}. \tag{4}$$

3. Kodėl e iracionalus?

Paskutinė (4) nelygybė tikslesnė už visas iki tol parašytąsias. Dešiniosios ir kairiosios pusių skirtumas lygus $\frac{1}{n!n}$, todėl jau su $n = 5$ ji „uždaro" skaičių e į $\frac{1}{600}$ ilgio intervalą. Kai $n = 6$, gaunami net trys teisingi skaitmenys: e $= 2{,}718\ldots$; kai $n = 12$ — net 9 teisingi skaitmenys: e $= 2{,}718281828\ldots$. Bet svarbiausia — šita nelygybė yra raktas įrodyti, kad skaičius e iracionalus. Įdomu dar ir tai, kad (4) nelygybę puikiausiai galima laikyti skaičiaus e apibrėžimu (jau trečiuoju): *Skaičiumi* e *vadiname vienintelį skaičių x, kuris su visomis n reikšmėmis tenkina nelygybes*

$$1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} < x < 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!n}.$$

Iš tikrųjų, toks skaičius vienintelis: jeigu būtų du skaičiai α ir β, $\alpha < \beta$, tenkinantys tas nelygybes, tai su visais n būtų teisinga nelygybė $\beta - \alpha < \frac{1}{n!n}$. Bet yra tik vienas neneigiamas skaičius, kuriam tokia nelygybė teisinga — tai 0. Vadinasi, $\beta = \alpha$ — prieštara. Jokių abejonių nekelia ir tai, kad toks skaičius x egzistuoja. Tiesa, šį faktą mes jau žinome (tas skaičius — tai seniai apibrėžtas skaičius e), bet net pirmą kartą pamačiusiam šį apibrėžimą tai gana aišku. Kai $n = 1$, dešinioji pusė lygi $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{1!1} = 3$, todėl kairiosios pusės seka aprėžta. Kadangi kairiosios pusės seka didėja, tai ji turi ribą $\bar{e}$. Štai ši riba $\bar{e}$ ir yra norimas skaičius. Tikrai, kairioji seka didėja, todėl kiekvienas jos narys mažesnis už jos ribą $\bar{e}$. Bet tą pačią ribą turi ir dešinioji seka, o kadangi ji mažėja, tai kiekvienas jos narys didesnis už $\bar{e}$. Žodžiu, skaičius e, kad ir kaip mes jį apibrėžtume — ar kaip anksčiau, kaip sekos $(1 + \frac{1}{n})^n$ ribą, ar kaip dabar (ir nė nežinotume, kad tai sekos $(1 + \frac{1}{n})^n$ riba) — tikrai tenkina abi nelygybes.

Taigi įrodykime, kad skaičius e yra iracionalus. Remkimės prieštaros metodu. Tarkime priešingai — kad skaičius e racionalus. Tada jį galima išreikšti trupmena $\frac{p}{q}$, čia p ir q — natūralieji skaičiai. Kadangi (4) nelygybė teisinga su visais n, tai ji teisinga ir su skaičiumi q. Gauname nelygybę

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!} < \frac{p}{q} < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!} + \frac{1}{q!q}.$$

Padauginkime ją iš $q!q$. Tada

$$q!q + \frac{q!q}{1!} + \cdots + \frac{q!q}{(q-1)!} + \frac{q!q}{q!} < q!p < q!q + \frac{q!q}{1!} + \cdots + \frac{q!q}{q!} + 1.$$

Kairioji nelygybės pusė yra tam tikras natūralusis skaičius N, dešinioji — skaičius $N + 1$. Taigi tarp dviejų gretimų natūraliųjų skaičių įsiterpė natūralusis skaičius $q!p$. Bet taip būti negali, taigi gavome prieštarą.

Vadinasi, mūsų prielaida, jog e yra racionalusis skaičius, neteisinga, todėl skaičius e iracionalus.

Taigi iracionaliųjų skaičių ratas prasiplėtė — dabar žinosime, kad iracionalus ne tik skaičius e, bet ir skaičiai $5\,\mathrm{e}$, $\frac{1}{\mathrm{e}}$, $\sqrt{\mathrm{e}}$, $\sqrt[3]{\mathrm{e}}$ ir pan. Vis dėlto kol kas nieko negalime pasakyti apie skaičių $\mathrm{e} + \frac{1}{\mathrm{e}}$ ar netgi skaičių e^2. Bet tai, kaip sakoma, jau kita istorija.

1. J. Mačys, Kodėl cos 17° iracionalus?, *Alfa plius omega*, **1**, 75–77, 2002.
2. J. Mačys, Kodėl cos $\frac{180°}{17}$ iracionalus?, *Alfa plius omega*, **2**, 62–64, 2002.
3. N. Vilenkinas, O. Ivaševas-Musatovas, S. Švarcburdas, *Algebra ir matematinė analizė* 11–12 *klasei. Vadovėlis mokykloms su sustiprintu matematikos mokymu*, Šviesa, Kaunas, 1989.
4. G. Fichtengolcas, *Matematinės analizės pagrindai*, t. I, Mintis, Vilnius, 1965.