$\alpha + \omega$, 2002, Nr. 3, 51–55

Hornerio schema

Svajūnas Sajavičius
svajunas.sajavicius@mail.lt

Hornerio schema — lengvai suprantamas algoritmas vieno kintamojo daugianario ir dvinario dalmens koeficientams ir liekanai rasti. Kai kuriais atvejais Hornerio schema patogu naudotis vietoj įprastos dalybos „kampu“.

Šiame straipsnyje trumpai aprašoma Hornerio schema, pateikiami keli šio dalybos metodo taikymo uždaviniams spręsti pavyzdžiai.

Mūsų žurnalo [1] straipsnyje plačiai rašyta apie Bezu teoremą ir jos taikymus aukštesniojo laipsnio lygtims spręsti. Kartais ieškant tokių lygčių sprendinių tenka naudotis daugianarių dalyba. Įprastas būdas — dalyba „kampu“, tačiau — ne visada patogus, todėl verta mokėti naudotis alternatyviu daugianario dalybos iš dvinario metodu.

Tegul

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

yra n-ojo laipsnio vieno kintamojo daugianaris, čia x — kintamasis dydis, n — neneigiamas sveikasis skaičius, vadinamas daugianario laipsniu (jį žymėsime $\deg(P)$), a_n ($a_n \neq 0$), $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ — realieji skaičiai, vadinami koeficientais.

Daugianarį $P(x)$ dalykime iš specialaus pirmojo laipsnio daugianario (dvinario) $S(x) = x - l$, čia l — bet koks skaičius:

$$\begin{array}{l|l}
-\,a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 & \quad x - l \\ \cline{2-2}
\underline{\;a_n x^n - l a_n x^{n-1}\;} & a_n x^{n-1} + (a_{n-1} + l a_n) x^{n-2} + (a_{n-2} + l(a_{n-1} + l a_n)) x^{n-3} + \cdots \\
\quad -\,(a_{n-1} + l a_n) x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} & \\
\quad \underline{\;(a_{n-1} + l a_n) x^{n-1} - l(a^{n-1} + l a_n) x^{n-2}\;} & \\
\qquad\qquad -\,a_{n-2} x^{n-2} + l(a_{n-1} + l a_n) x^{n-2} + a_{n-3} x^{n-3} & \\
\qquad\qquad \underline{\;a_{n-2} x^{n-2} + l(a_{n-1} + l a_n) x^{n-2} - l(a_{n-2} + l(a_{n-1} + l a_n)) x^{n-3}\;} & \\
\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots &
\end{array}$$

Teorema. *Jeigu $P(x)$ yra daugianaris ir* $\deg(P) = n$, *tai $P(x)$ dalijant iš dvinario $S(x) = x - l$, čia l — bet koks skaičius, gaunamas vienintelis pilnasis ar nepilnasis dalmuo — daugianaris $D(x)$,* $\deg(D) = n - 1$ *ir vienintelė liekana $L(x)$,* $\deg(L) = 0$. *Daugianariams $P(x)$, $S(x)$, $D(x)$ ir $L(x)$ teisinga lygybė*

$$P(x) = S(x) \cdot D(x) + L(x).$$

Pastaba. Šią, kaip ir kitas teoremas, straipsnyje pateikiame be įrodymų. Juos, taip pat daugiau apie Hornerio schemą, jos sudarymą ir taikymus rasite [2], [3], [4] knygose.

Nepilnojo dalmens $D(x) = a_n x^{n-1} + (a_{n-1} + la_n)x^{n-2} + (a_{n-2} + l(a_{n-1} + la_n))x^{n-3} + \cdots$, gauto daugianarį $P(x)$ dalijant iš $S(x)$, koeficientus pakeiskime koeficientais b_k ($k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$). Tuomet

$$D(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0.$$

Daugianario $D(x)$ koeficientus ir liekaną $L(x)$ galime apskaičiuoti naudodamiesi šiais dinaminiais koeficientų $D(x)$ ir $P(x)$ bei skaičiaus l ryšiais:

$$\begin{aligned}
&b_{n-1} = a_n,\\
&b_{n-2} = a_{n-1} + la_n = a_{n-1} + lb_{n-1},\\
&b_{n-3} = a_{n-2} + l(a_{n-1} + la_n) = a_{n-2} + lb_{n-2},\\
&b_{n-4} = a_{n-3} + lb_{n-3},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&b_1 = a_2 + lb_2,\\
&b_0 = a_1 + lb_1,\\
&L(x) = a_0 + lb_0.
\end{aligned}$$

Toks skaičiavimo būdas vadinamas Hornerio[1] schema. Dėl patogumo, skaičiavimo rezultatai surašomi į Hornerio lentelę:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\ldots$	a_2	a_1	a_0
l	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\ldots$	b_1	b_0	$L(x)$

Išnagrinėję keletą pavyzdžių, įsitikinsime, kad toks paprastas daugianarių dalybos metodas gali padėti lengviau išspręsti kai kuriuos uždavinius.

1 pavyzdys. *Raskime dalmenį $D(x)$ ir liekaną $L(x)$, gautus daugianarį $P(x) = 4x^7 + 2x^5 - x^4 - 5x^2 + 3$ dalijant iš dvinario $S(x) = x - 2$.*

Sprendimas. Sudarykime Hornerio lentelę:

	4	0	2	−1	0	−5	3
2	4	8	18	35	70	135	273

Taigi nepilnasis dalmuo $D(x) = 4x^5 + 8x^4 + 18x^3 + 35x^2 + 70x + 135$, o liekana $L(x) = 273$.

Naudojantis Hornerio schema, lengvai randama daugianario $P(x)$ reikšmė bet kuriame taške l. Prisiminkime Bezu[2] teoremą.

Bezu teorema. *Daugianario $P(x)$ reikšmė taške l lygi liekanai, gautai $P(x)$ dalijant iš $S(x) = x - l$.*

Pagal Bezu teoremą ir Hornerio schemos apibrėžimą Hornerio lentelės, sudarytos $P(x)$ dalijant iš $S(x) = x - l$, paskutiniame antrosios eilutės langelyje esantis skaičius ir yra $P(x)$ reikšmė taške l.

Daugianario reikšmę taške lengvai ir greitai galime apskaičiuoti net nesudarę Hornerio lentelės, o daugianarį užrašę pavidalu $P(x) = (\cdots(((a_n)x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \cdots + a_1)x + a_0$. Taip skaičiuojant daugianario reikšmę, atliekami tie patys veiksmai, kaip ir naudojantis lentele. Toks skaičiavimo būdas patogus tada, kai reikia rasti tik pačią daugianario reikšmę ir nesvarbus dalmuo.

[1] William George Horner (1786–1837), anglų matematikas.

[2] Etienne Bezout (1730–1783), prancūzų matematikas.

2 pavyzdys. *Raskime daugianario* $P(x) = x^6 - 3x^5 + 2x^4 - x^3 + 2x + 4$ *reikšmę taške* $x_0 = 4$.

Sprendimas. Daugianarį galime užrašyti taip: $P(x) = ((((((1)x - 3)x + 2)x - 1)x + 0)x + 2)x + 4$. Tai $P(4) = (((((1 \cdot 4 - 3) \cdot 4 + 2) \cdot 4 - 1) \cdot 4 + 0)4 + 2) \cdot 4 + 4 = 1484$. Žinoma, tą patį rezultatą gauname pasinaudoję Hornerio lentele:

	1	−3	2	−1	0	2	4
4	1	1	6	23	92	370	1484

Atsakymas. $P(4) = 1484$.

Apibrėžimas. Daugianario $P(x)$ išraiška

$$P(x) = m_n(x - l)^n + m_{n-1}(x - l)^{n-1} + \cdots + m_2(x - l)^2 + m_1(x - l) + m_0$$

vadinama daugianario skleidiniu $x - l$ laipsniais.

Skleidinį bet kokio dvinario $x - l$ laipsniais turi kiekvienas daugianaris. Šią išraišką patogiausia gauti taip pat naudojantis Hornerio schema. Daugianarį $P(x)$ reikia nuosekliai dalyti iš dvinario $x - l$.

3 pavyzdys. *Daugianarį* $P(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 4x + 5$ *išskleiskime dvinario* $x + 2$ *laipsniais.*

Sprendimas. $P(x)$ nuosekliai dalykime iš dvinario $x + 2$:

	1	−2	−1	4	5
−2	1	−4	7	−10	25
−2	1	−6	19	−48	
−2	1	−8	35		
−2	1	−10			
−2	1				

Pradedant nuo antrosios, paskutiniuose kiekvienos eilutės langeliuose esantys skaičiai atitinkamai lygus ieškomo skleidinio koeficientams $m_0, m_1, \ldots, m_n$. Vadinasi, ieškomas daugianario skleidinys yra $P(x) = (x + 2)^4 - 10(x + 2)^3 + 35(x + 2)^2 - 48(x + 2) + 25$.

Hornerio schema palengvina kai kurių aukštesniųjų laipsnių lygčių sprendimą. Prisiminkime kelis labai naudingus teiginius bei daugianario šaknies sąvokos apibrėžimą.

Apibrėžimas. Skaičius l vadinamas daugianario $P(x)$ šaknimi, jeigu $P(l) = 0$, t. y. daugianario $P(x)$ šaknis yra lygties $P(x) = 0$ sprendinys.

Paprastai lygybę $P(x) = 0$ vadiname lygtimi, o visus skaičius l, tenkinančius lygtį, — lygties sprendiniais (šaknimis).

4 pavyzdys. *Išspręskime lygtį* $3x^5 - 5x^4 - 19x^3 + 17x^2 + 16x - 12 = 0$.

Sprendimas. Lygtį patogu spręsti taikant vadinamąjį laipsnio žeminimo metodą. Remkimės teiginiu, jog kiekviena sveikoji daugianario su sveikaisiais koeficientais šaknis yra laisvojo nario daliklis. Naudodamiesi Hornerio schema, tikrinkime, kurie skaičiai iš laisvojo nario daliklių aibės $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$ yra lygties sveikosios šaknys:

	3	−5	−5	17	16	−12
−1	3	−8	−11	28	−12	0

Matome, kad $x_1 = -1$ yra lygties šaknis, t. y. pradinė lygtis ekvivalenti lygčiai $(x+1)(3x^4 - -8x^3 - 11x^2 + 28x - 12) = 0$. Eliminavę daugiklį $x+1$, gauname ketvirtojo laipsnio lygtį $3x^4 - 8x^3 - 11x^2 + 28x - 12 = 0$. Vėl tikrinkime, kurie skaičiai iš aibės ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 12 yra lygties sveikosios šaknys. Nors jau įsitikinome, kad -1 yra lygties šaknis, tačiau lygtys dažnai turi kartotinių šaknų, todėl reikėtų patikrinti, ar tokia nėra kiekviena rasta lygties šaknis.

	3	-8	-11	28	-12
-1	3	-11	0	28	-40
1	3	-5	-16	12	0

Taigi $x_2 = 1$ taip yra pat lygties šaknis. Eliminavę daugiklį $x - 1$ gauname trečiojo laipsnio lygtį $3x^3 - 5x^2 - 16x + 12 = 0$. Toliau ieškome sveikųjų lygties šaknų:

	3	-5	-16	12
1	3	-2	-18	-6
-2	3	-11	6	0

$x_3 = -2$, o išsprendę kvadratinę lygtį $3x^2 - 11x + 6 = 0$, randame likusias dvi lygties šaknis: $x_4 = 3$ ir $x_5 = \frac{2}{3}$.

Atsakymas. $x \in \{-2; -1; \frac{2}{3}; 1; 3\}$.

5 pavyzdys. *Išspręskime lygtį* $x^3 - 1\frac{1}{12}x^2 + \frac{3}{8}x - \frac{1}{24} = 0$.

Sprendimas. Jei dagintume abi lygties puses iš 24 ir tarp laisvojo nario daliklių bandytume ieškoti sveikųjų lygties sprendinių, jų rasti nepavyktų, mat tokių sprendinių ši lygtis paprasčiausiai neturi (įsitikinkite!). Žinome, jeigu algebrinė lygtis su sveikaisiais koeficientais turi racionalų sprendinį $\frac{p}{q}$, tai p yra laisvojo nario daliklis, o q — vyriausiojo daugianario koeficiento daliklis.

Taigi įsitikinę, kad lygtis $24x^3 - 26x^2 + 9x - 1 = 0$ sveikųjų sprendinių neturi, galime teigti, kad racionalieji lygties sprendiniai gali būti iš aibės $\{\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{1}{8}, \pm\frac{1}{12}, \pm\frac{1}{24}\}$. Naudokimės Hornerio schema:

	24	-26	9	-1
$-1/2$	28	-38	28	-15
$1/2$	24	-14	2	0

Matome, kad lygties šaknis $x_1 = \frac{1}{2}$. Išsprendę kvadratinę lygtį $12x^2 - 7x + 1 = 0$, randame likusias šaknis: $x_2 = \frac{1}{4}$ ir $x_2 = \frac{1}{3}$.

Atsakymas. $x \in \{\frac{1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}\}$.

Kai daugianario laipsnis yra nedidelis (3, 4, jau nekalbant apie 2), jo reikšmes nesunku skaičiuoti tiesiog mintinai. Tačiau aukštesnių skaičių laipsnių dažnai nepamename, o kelis ar keliolika kartų atlikinėti daugybos operaciją — tiesiog nepatogu.

6 pavyzdys. *Raskime* $\lim_{x\to 1} \frac{x+x^2+\dots+x^n-n}{x-1}$.

Šis uždavinys 2002 m. pavasarį buvo pateiktas Šiaulių universitete kasmet rengiamų jaunųjų matematikų varžybų dalyviams (*Alfa plius omega*, 2002, Nr. 1, p. 20).

Sprendimas. Pabandę apskaičiuoti funkcijos

$$f(x)=\frac{x+x^2+\dots+x^n-n}{x-1}=\frac{x^n+x^{n-1}+\dots+x^2+x-n}{x-1}$$

reikšmę taške $x_0=1$, gauname neapibrėžtumą: $f(1)=\frac{n-n}{1-1}=\frac{0}{0}$.

Vadinasi, funkciją reikia pertvarkyti. Būtų patogu ją suprastinti iš $x-1$, t. y. skaitiklyje esantį daugianarį $x^n+x^{n-1}+\dots+x-n$ padalyti iš vardiklyje esančio dvinario $x-1$. Dalmenį galime rasti sudarę Hornerio lentelę. Pastebėsime, kad šįkart Hornerio lentelė nebus baigtinė:

	1	1	1	...	1	1	$-n$
1	1	2	3	...	$n-1$	n	0

Funkcijos skaitiklį padaliję iš vardiklio (t. y. trupmeną suprastinę iš $x-1$), gauname daugianarį $x^{n-1}+2x^{n-2}+3x^{n-3}+\dots+(n-1)x+n$. Dabar jau galime apskaičiuoti

$$\lim_{x\to 1} x^{n-1}+2x^{n-2}+3x^{n-3}+\dots+(n-1)x+n=1+2+3+\dots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Atsakymas. $\frac{n(n+1)}{2}$.

Uždaviniai savarankiškam darbui

Taikydami Hornerio schemą, šiuos uždavinius išspręskite savarankiškai.

1. Apskaičiuokite:
a) $P(9)$, kai $P(x)=x^4-5x^3+4x^2-17$,
b) $P(7)$, kai $P(x)=x^5-4x^4-4x^3-17x^2-14x+99$.

2. Išspręskite lygtį:
a) $3x^5-x^4-45x^3-15x^2+82x-24=0$,
b) $2x^4-5x^3-20x^2+35x-12=0$,
c) $x^4-x^3-7x^2+x+6=0$,
d) $6x^6-19x^5-16x^4+72x^3-44x^2-5x+6=0$,
e) $x^3+\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{4}x-\frac{1}{6}=0$.

3. Intervalų metodu išspręskite nelygybę:
a) $x^6-7x^5+15x^4-10x^3+7x^2-15x+9>0$,
b) $x^5-13x^4+63x^3-139x^2-136x-48<0$.

Atsakymai

1. a) 3223; b) 4999.
2. a) $x\in\{-3;-2;\frac{1}{3};1;4\}$; b) $x\in\{-3;\frac{1}{2};1;4\}$; c) $x\in\{-2;-1;1;3\}$;
d) $x\in\{-2;-\frac{1}{3};\frac{1}{2};1;3;\}$; e) $x\in\{-\frac{1}{2};-\frac{1}{3};\frac{1}{2}\}$.
3. a) $x\in R$; b) $x\in(-\infty;1)\cup(1;3)$.

1. I. Baranauskienė, Bezu teorema ir jos taikymai, *Alfa plius omega*, **3**, 31–34, 2001.
2. V. Boltianskis, I. Sidarovas, M. Šabuninas, *Elementariosios matematikos paskaitos ir uždaviniai*, Šviesa, Kaunas, 1982.
3. K. Bulota, P. Survila, *Algebra ir skaičių teorija. II dalis*, Mokslas, Vilnius, 1990.
4. G. Chasinas, Daugianariai ir jų šaknys, *Papildomi X–XI klasės matematikos kurso skyriai fakultatyviniams užsiėmimams*. Straipsnių rinkinys, Šviesa, Kaunas, 1973, p. 107–154.