$\alpha + \omega$, 2002, Nr. 3, 48–50

Atvirkštinė funkcija: tradicinis požiūris

Vilius Stakėnas
vilius@ktl.mii.lt

Straipsnyje komentuojamas naujajame matematikos vadovėlyje XI klasei išdėstytas požiūris į atvirkštinės funkcijos sąvoką. Teigiama, kad jis nėra klaidingas, veikiau — tradicinis.

Visai nesunku gerais ketinimais pagrįstą kritiką atskirti nuo kritikos, kurios ketinimai neaiškūs. Jeigu sakoma, kad „jūsų darbas nevykęs, nuobodus, netinkamas", — būkite tikri, kad kalbama ne vien tik apie darbą. Kai nieko nepasakoma konkrečiai, jūs spėliojate, perkratinėjate savo argumentus, galiausiai imate nebepasitikėti savo svarstymais bei sprendimais ir tampate tiesiog lengviau pažeidžiamas ir silpnesnis.

Gerų ketinimų kritikos formulė labai paprasta. Tai dipolis: jūsų mintis — oponento mintis. Atsakymas į ją taip pat paprastas: jūs įvertinate, kurios pusės krūvis yra didesnis, ir tai pusei pritariate. Visais atvejais tampate stipresnis.

Gerų ketinimų padiktuotą kritinį straipsnį ką tik perskaitėte. Buvau net linkęs į jį kol kas neatsakyti, kad neišsklaidyčiau skaitytojui padaryto įspūdžio. Tačiau straipsnio autorius mane įsakmiai paragino: turi atsakyti! Tai man labai patiko. Vadinasi, ne tiek norima nugalėti, kiek diskutuoti, t. y. išbandyti savo minčių stiprumą.

Pirmuoju mano ir straipsnio autoriaus nuomonių takoskyros ženklu laikau sakinį po cituojamu atvirkštinės funkcijos apibrėžimu. Autorius sako, kad tai „absoliučiai tikslus apibrėžimas". Aš jo nelaikau absoliučiai tiksliu, jis gali net pasirodyti nelogiškas, pradėjus gilintis, ką reiškia jame panaudoti žymenys. Kodėl tada autoriai pateikia tokį apibrėžimą, jeigu nelaiko jo itin geru? Todėl kad rašant mokyklinės matematikos vadovėlį vienas iš svarbiausių dalykų, kurį reikia prisiminti, yra kompromisas: viena vertus, pastangos dėstyti temą tiksliai, kita vertus, rūpestis, kad tikslumas nesukliudytų susidaryti aiškaus intuityvaus sąvokos vaizdinio. Viena vertus, tenka stengtis užbėgti galimiems klausimams už akių, kita vertus — nesudaryti sąlygų kilti naujiems klausimams.

Kai skaitau matematinį tekstą, stengiuosi įsivaizduoti, kokia yra kiekvieno žymens „matematinė būtis". Pavyzdžiui, kai skaitau „a yra natūralusis skaičius" arba „m yra tiesė", tarsi matau už šių sakinių realius objektus (nesvarbu, kad jų realumas yra tik matematinis).

O kaip suvokti, pavyzdžiui, funkcijos žymenį $y = f(x)$? Raidė f yra funkcijos vardas, pagal kurį tarsi kokiame tvarkingame archyve aš galiu rasti išsamų aprašymą, kaip šios funkcijos „mechanizmas" veikia. Taigi mano vaizduotėje „matematinė" simbolio f būtis yra konkreti. O kas yra x ir y? Žinoma, tai ne skaičiai. Sakysite, tai kintamieji. O kas tai yra? Juk netvirtinsime, kad tai tik raidės. Aš manau, kad jie neturi „apčiuopiamos" matematinės būties, jie yra, jei norite, „matematinių konteinerių" metaforos, arba nuorodos į „apčiuopiamas" aibes, kurios yra susijusios su funkcija f. Tačiau šių „konteinerių" tose aibėse nėra, taigi apskritai negerai rašyti (kaip rašoma minėtame apibrėžime) $x \in X$, $y \in Y$. Todėl vadovėlyje ir yra sakinys, kurį straipsnio autorius laiko klaidos pranašu: „...kintamuosius galime žymėti ir kitaip, funkcija ... išliks ta pati".

Skaitant straipsnį toliau, vis labiau ryškėja, kad autorius, skirtingai nei aš, linkęs galvoti, kad kintamieji x, y gyvena aibėse, netgi gali turėti tam tikro turto (pavyzdžiui, dimensijas). Aš nemanau, kad autorius klysta. Tačiau man labiau patinka asketiškesnė aibių egzistencija: aibės turi elementus ir nieko daugiau. Kalbant abstrakčiai, funkcijos taip pat yra aibės (skaičių porų); tačiau vaizdesnė kalba naudinga aiškinantis net ir abstrakčiausius dalykus, todėl ir sakome: „funkcija didėja, mažėja...“, „kintamasis x įgyja reikšmes“ ir pan.

Iš esmės 1 pavyzdžio kritika ir pagrįsta tuo tikėjimu dėl savarankiško kintamųjų gyvenimo. Netgi rašoma „nepriklausomas kintamasis x turi būti aibėje X, o priklausomas — aibėje Y“. Vadinasi, negalima sakyti, kad funkcijos $f(x) = 2x + 1$ atvirkštinė yra funkcija $g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$. Aš tikriausiai sutikčiau su tuo, jeigu funkcija $f(x)$ įgytų reikšmes kitoje, negu ji yra apibrėžta, aibėje. Tačiau jos apibrėžimo ir reikšmių aibė yra ta pati realiųjų skaičių aibė R. Juk turbūt nesakysime, kad ši funkcija apibrėžta vienoje skaičių aibėje, o reikšmes įgyja jau kitoje. Ar nebus sunku paaiškinti, kiek tų realiųjų skaičių aibių yra: viena ar daugiau?

Tiesa, vadovėlio skyriaus pradžioje piešiniai tarsi sako, kad gali būti ne viena realiųjų skaičių aibė. Tačiau tai yra tik piešiniai, vadovėlio autoriai tikrai nežvelgė į juos taip rimtai kaip straipsnio autorius ir nelaikė tai griežtai dėstomos teorijos dalimi.

Nutarus, kad realiųjų skaičių aibė yra viena, teks sutikti, kad ir funkcija $f(x) = 2x + 1$, ir jos atvirkštinė yra apibrėžtos toje pačioje aibėje. Vadinasi, teks apgyvendinti toje pačioje aibėje nepriklausomus kintamuosius x, y ir sakyti, kad funkcijos $f(x) = 2x + 1$ atvirkštinė yra $g(y) = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$. Tai atrodytų truputį keista ir galbūt skatintų manyti, kad funkciją ir kintamuosius žyminčios raidės kokiu nors būdu yra susijusios.

Žinoma, aš visiškai sutinku su autoriaus siūlymu sakyti, pavyzdžiui, „funkcijos $y = x^3$ atvirkštinė yra funkcija $x = \sqrt[3]{y}$. Tačiau vis dėlto teks abiejų funkcijų grafikus braižyti toje pačioje koordinačių sistemoje. Štai tada abiem nepriklausomiems kintamiesiems x, y taps ankšta.

Taigi laikydamiesi straipsnio autoriaus požiūrio tam tikrų sunkumų neišvengtume. Todėl nemanau, kad vadovėlyje atvirkštinė funkcija dėstoma klaidingai, kad negalima sakyti, jog funkcijos $y = f(x)$ ir $y = g(x)$ yra viena kitai atvirkštinės, nes tokių funkcijų „veikimo kryptys“ yra priešingos. Jeigu jos yra apibrėžtos toje pačioje aibėje, jeigu neprisimeni kiekvieną sekundę jų glaudžios giminystės (juk dažnai nagrinėjant reiškinius, sudarytus ir iš rodiklinių, ir iš logaritminių funkcijų, ne tiek svarbu, kad jos yra viena kitai atvirkštinės, kiek svarbios kitos jų savybės), tai „veikimo krypčių“ priešingumas netenka prasmės.

O dabar pakalbėkime apie grafikus. Čia aš norėčiau tvirčiau paprieštarauti.

Funkcijos grafikas vadovėlyje apibrėžtas taip:

Funkcijos $y = f(x)$, kurios apibrėžimo sritis yra X, grafiku vadinama koordinačių plokštumos taškų aibė $(x; f(x))$, $x \in X$.

Apibrėžimas trumpas. Trumpi apibrėžimai kartais būna klastingi: juos greičiau įsimeni, nei supranti. Todėl pakartokime sau, kaip naudodamiesi šiuo apibrėžimu atidėtume, jeigu reiktų, funkcijos grafiko tašką. Pirmiausia pasirinktume koordinačių sistemą. Mokykloje pasirinkimas tikriausiai kone vienintelis: horizontalioji ašis nukreipta į dešinę, vertikalioji — į viršų. Pasirinkę *nepriklausomojo kintamojo* reikšmę, kuri būtų mūsų *abscisė*, apskaičiuotume *funkcijos reikšmę*, kuri būtų mūsų *ordinatė*, ir tada atidėtume grafiko tašką.

Sutikus su tokia grafiko taškų atidėjimo procedūra, ar galima tvirtinti, kaip daro autorius, išsprendęs 2 užduotį, kad „funkcijų $y = 3x + 1$ ir $x = \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}$ grafikai yra viena ir ta pati tiesė“? Grafikas juk nėra šiaip sau plokštumos kreivė, bet kreivė, į kurią reikia žiūrėti iš tam tikros pozicijos, t. y. koordinačių sistema yra ta terpė, kurioje geometrinė kreivė tampa grafiku. Taip tvirtinti kaip autorius gal ir galima, tačiau reikia apsimesti nesupratus, jog grafikus reikėjo braižyti toje pačioje koordinačių sistemoje.

Galvojant apie funkcijas abstrakčiai (esu dėkingas mano dabartiniam oponentui, kad jis mane studijų metais neblogai to išmokė), funkcijos grafikas yra aibė, visai nesusijusi su geometrija. Jei funkcijos yra skirtingos, tai ir jų grafikai turi skirtis.

Autoriaus idėją, kad funkcijų $y = f(x)$ ir $x = f^{-1}(y)$ grafikas yra vienas ir tas pats, laikau pernelyg revoliucinga, kuri kažin ar „labai supaprastintų gyvenimą".

Parašęs šį tekstą, sumaniau dar kartą žvilgterti, kaip atvirkštinė funkcija dėstoma kituose vadovėliuose. Deja, pačių naujausių neturiu, tačiau vis dėlto...

...funkcija $f(x) = x^3$ yra apgręžiama, o $g(x) = \sqrt[3]{x}$ yra jai atvirkštinė funkcija.

Algebra ir analizės pradmenys, red. A. Kolmogorovas, Šviesa, Kaunas, 1988

... $x \mapsto a^x$ ir $x \mapsto \log_a x$ yra viena kitai atvirkštinės...

W. Breidenbach, *Mathematik, 10 Schuljahr*, G. Westerman Verlag, 1974

...funkcijos $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto x^2$ yra viena kitai atvirkštinės...

Mathématiques 2^e, *Collection M. Monge, Librairie Classique*, Eugène Belin, 1981

... $y = x^2$ ir $x = \sqrt{y}$ yra viena kitai atvirkštinės...

K. Holth, *Mathematik grundbog* 1, Forlaget TRIP, 1991

Taigi daniškame vadovėlyje rašoma taip, kaip siūlo straipsnio autorius. Tačiau jau po kelių eilučių abiejų funkcijų grafikai braižomi toje pačioje koordinačių sistemoje ir rašoma:

$$x \mapsto \sqrt{x}, \quad x \mapsto x^2.$$

Beje, teiginį apie funkcijų grafikų simetriškumą, kurį straipsnio autorius pavadino kulminaciniu (nemanau, kad gerąja prasme), radau keliuose iš minėtų vadovėlių.

Taigi vadovėlyje išdėstyto požiūrio į atvirkštinę funkciją negaliu pripažinti klaidingu. Mano oponentas vadina jį mistiškų vizijų vaikymusi ir stereotipų nelaisve. Aš tokį požiūrį pavadinčiau tiesiog tradiciniu.