$\alpha + \omega$, 2002, Nr. 3, 43–47

Atvirkštinė funkcija ir jos grafikas

Ričardas Kudžma
ricardas.kudzma@maf.vu.lt

Autorius kritikuoja vadovėlyje „Matematika 11, I dalis" (TEV, Vilnius, 2002) pateiktą atvirkštinės funkcijos išdėstymą. Jis teigia, pavyzdžiui, kad klaidinga sakyti: „funkcijos $f(x) = x^3$ atvirkštinė yra funkcija $g(x) = \sqrt[3]{x}$".

Visiškai neseniai (2002 m.) leidykla TEV išleido matematikos vadovėlį vienuoliktai klasei „Matematika 11. I ir II dalys". Vadovėlį rengė naujas autorių kolektyvas, vadovaujamas Viliaus Stakėno. Tai tikrai kokybiškesnis vadovėlis už ankstesniuosius. Labai patiko istoriniai intarpai. Bet šio straipsnelio tikslas ne girti, o pakalbėti apie netikslumus. 2002 m. lapkričio mėnesį Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultete vyko matematikos metodikos konferencija. Joje vienas iš vadovėlio autorių Eugenijus Stankus užsiminė, kad yra sulaukęs priekaištų dėl per daug sudėtingo skyrelio apie atvirkštines funkcijas. Tam visiškai pritariu. Galima pasakyti tiksliau — sudėtingas todėl, kad klaidingas.

Pradėkime nuo 131 puslapio. Mano nuomone, tai neblogas paruošiamasis tekstas apibrėžti atvirkštinę funkciją. Tačiau aš asmeniškai rasčiau atvirkštines funkcijas

$$R = h(V) = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} \quad \text{ir} \quad n = v(m) = \frac{m}{2}.$$

Verskime kitą puslapį. Jis prasideda pagrindiniu skyrelio apibrėžimu.

Apibrėžimas. *Tegu funkcijos $y = f(x)$ apibrėžimo sritis yra aibė X, o reikšmių sritis — aibė Y, be to, ši funkcija skirtingoms x reikšmėms priskiria skirtingas y reikšmes. Taisyklė, kuri kiekvienai reikšmei $y \in Y$ priskiria reikšmę $x \in X$, su kuria $f(x) = y$, vadinama funkcija, atvirkštine funkcijai $f(x)$.*

Absoliučiai tikslus apibrėžimas. Skaitykime toliau:

Jei funkcija $y = f(x)$ turi atvirkštinę, tai kintamasis y yra atvirkštinės funkcijos nepriklausomas kintamasis, o x — priklausomas kintamasis, todėl atvirkštinę funkciją galima žymėti taip: $x = g(y)$.

Beveik visas sakinys yra labai geras, tik žodelis „galima" verčia suklusti, nes neaišku, į ką jis nukreiptas: į funkcijos žymenį g ar į kintamuosius x ir y.

Sakinį aš pabaigčiau taip: „...todėl atvirkštinę funkciją *reikia* žymėti taip: $x = g(y)$". Mes laisvai galime rinktis tik atvirkštinės funkcijos simbolį, t. y. raidę g, h ar dar kokią kitą. Dar tikslesnė sakinio pabaiga būtų tokia: „...todėl atvirkštinė funkcija žymima $x = f^{-1}(y)$". Tada nereikėtų naujos raidės, kuri niekaip nesusijusi su funkcija f. Tačiau vidurinėje mokykloje simbolis f^{-1} gali būti priimtas kaip sudėtingas, nes kiltų sunkumų atskiriant du dalykus:

- $f^{-1}(a)$ atvirkštinės funkcijos f^{-1} reikšmę taške a;
- $f(a)^{-1} = \frac{1}{f(a)}$ — skaičių, atvirkštinį funkcijos f reikšmei taške a.

Nors žymens f^{-1} gal ir nereikėtų bijoti, nes jis būtų naudojamas tik apibrėžiant atvirkštines funkcijas. Vėliau jis būtų pakeistas, nes elementarios matematikos pagrindinių funkcijų atvirkštinės turi savo žymenis:

- jei $y = f(x) = x^n$, tai $x = f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{n}}$;
- jei $y = f(x) = a^x$, tai $x = f^{-1}(y) = \log_a y$;
- jei $y = f(x) = \sin x$, tai $x = f^{-1}(y) = \sin^{-1}(y) = \arcsin y$ ir t. t.

Toliau yra sakinys:

Tačiau kintamuosius galime žymėti ir kitaip, funkcija (reikšmių priskyrimo taisyklė) išliks ta pati.

Tai jau klaidos pranašas. Dar ne klaida, kol nepasakoma, kad funkcija su pakeistais kintamaisiais yra pirmosios atvirkštinė. Tekste tai tiesiogiai ir nepasakyta, bet turima galvoje.

Funkcija $y = f(x)$ ir jai atvirkštinė $x = g(y)$ nėra tik reikšmių priskyrimo taisyklės. Šios funkcijos yra susietos su dviem labai konkrečiomis aibėmis. Aibė X yra funkcijos f apibrėžimo sritis ir funkcijos g reikšmių sritis, o aibė Y — funkcijos g apibrėžimo sritis ir funkcijos f reikšmių sritis. Kalbant apie atvirkštinę funkciją, reiktų turėti omenyje nedalomą ketvertą — (X, Y, f, g) ir toje teksto dalyje kintamųjų vardai turėtų būti fiksuoti, t. y. $x \in X$ ir $y \in Y$.

Jau vien dėlto reikėjo išspręsti 1 užduotį ir formulę $R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$ turėti prieš akis, kad nekiltų noras joje keisti kintamuosius $V = \sqrt[3]{\frac{3R}{4\pi}}$. Ką sako šita formulė? Joje neteisingos kintamųjų dimensijos. Jei R matuojama ilgio vienetais, o V — tūrio, tai pakeitus argumentus formulė tampa beprasmė.

Skaitykime toliau.

1 pavyzdys. *Raskime funkcijos $y = 2x + 1$ atvirkštinę funkciją.*

Randama funkcija $x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$. Užuot pagal apibrėžimą patikrinus, kad ši funkcija yra atvirkštinė, t. y.

$$f(x) = f\Big(\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\Big) = 2\Big(\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\Big) + 1 = y - 1 + 1 = y,$$

ir padėjus tašką, kuriama visa pastraipa, kad galų gale būtų paskelbtas taip norimas rezultatas:

Taigi funkcijos $y = 2x + 1$ atvirkštinė yra $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$, arba funkcijos $f(x) = 2x + 1$ atvirkštinė yra funkcija $g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

Deja, šitas rezultatas yra klaidingas, nes prieštarauja apibrėžimui:

1. Viename sakinyje užrašytų abiejų funkcijų nepriklausomas kintamasis x turi būti aibėje X, o priklausomas kintamasis y — aibėje Y. Kitaip suprasti šio sakinio negalima. Visai nesvarbu, kad šiuo konkrečiu atveju $X = Y = \boldsymbol{R}$.
2. Kaip galima patikrinti esminę apibrėžimo sąlygą $f(g(y)) = y$ neturint išraiškos $x = g(y)$? Iš sąryšio $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ ieškodami x, gauname $x = 2y + 1$. Tikrindami apibrėžimą, gauname $f(x) = f(2y + 1) = 2(2y + 1) + 1 = 4y + 3$. Tai tikrai ne tai, ką reikėtų gauti. Apibrėžimas yra tam, kad „dirbtų“, kad funkcijos, kurias gauname ir norime vadinti atvirkštinėmis, tenkintų apibrėžimo sąlygas. Tačiau autoriai visą energiją skiria įtikinti skaitytoją, kad atvirkštinėje funkcijoje galima keisti kintamųjų žymenis. Tada gaunama atvirkštinės funkcijos išraiška, kuri netinkama patikrinti pagrindinę atvirkštinės funkcijos apibrėžimo sąlygą. Kam gimdomas apibrėžimas, beje, ne taip jau paprastas, jei jau kitu

sakiniu ištraukiamas peilis, kuris galandamas ir sistemingai nuleidinėjamas kraujas? Visiškai negyvybingas apibrėžimas numetamas į šiukšlyną ir užmirštamas. Kad taip yra, matyti iš skyrelio apie logaritminę funkciją. Paties logaritmo apibrėžime (p. 166) ir pagrindinėje logaritmų tapatybėje $a^{\log_a b} = b$ (p. 167) nė neužsimenama, kad tai pagrindinė atvirkštinės funkcijos apibrėžimo lygybė $f(g(y)) = y$ (ar $f(f^{-1}(y)) = y$). Atvirkštinė funkcija labai trumpam primenama 172 puslapyje, bet tuojau pat sukeičiami kintamųjų vardai ir apibrėžimas užmirštamas, nes jis nebegali „dirbti".

Mano supratimu, klaidingi visi tokie teiginiai:

- Funkcijos $y = 2x + 1$ atvirkštinė yra $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ (p. 132).
- Tarkime, funkcija $y = f(x)$ turi atvirkštinę funkciją $y = g(x)$ (p. 132).
- Funkcijos $y = x^3$ atvirkštinė yra funkcija $y = \sqrt[3]{x}$ (p. 133).
- Funkcijos $f(x) = x^{2m+1} (m \in N)$ atvirkštinė yra $g(x) = \sqrt[2m+1]{x}$ (p. 145).
- Logaritminė funkcija $g(x) = \log_a x$ yra funkcijos $f(x) = a^x$ atvirkštinė (p. 172).

Labai gaila, kad tai kartojama ir antrosios vadovėlio dalies skyriuje apie trigonometrines funkcijas.

Turėtų būti sakoma:

- Funkcijos $y = x^3$ ir $x = \sqrt[3]{y}$, $x \in \boldsymbol{R}$, $y \in \boldsymbol{R}$, yra atvirkštinės viena kitai.
- Funkcijos $y = \exp x$ ar $y = e^x$ atvirkštinė funkcija yra $x = \ln y$, $x \in \boldsymbol{R}$, $y \in (0; +\infty)$.
- Funkcijos $y = a^x$ atvirkštinė funkcija yra $x = \log_a y$, $x \in \boldsymbol{R}$, $y \in (0; +\infty)$.
- Funkcijos $y = \ln x$ atvirkštinė yra funkcija $x = \exp y$, $x \in (0; +\infty)$, $y \in \boldsymbol{R}$.
- Funkcijos $y = \sin x$ atvirkštinė funkcija yra $x = \arcsin y$, $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, $y \in [-1; 1]$.

Arba

- Kubinė šaknis yra atvirkštinė kubinei (kėlimo kubu) funkcijai.
- Logaritminė funkcija yra atvirkštinė eksponentinei.
- Arksinusas yra atvirkštinė sinuso funkcija.

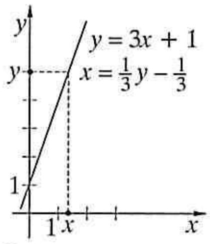
Skaitykime dar toliau.

2 užduotis. *Raskite funkcijos $f(x) = 3x + 1$ atvirkštinę funkciją. Nubraižykite abiejų funkcijų grafikus.*

Suraskime atvirkštinę funkciją. Padarykime tai labai nuosekliai.

1. Pasirašykime funkcijos apibrėžimą
   $y = 3x + 1$.
2. Interpretuokime šią lygybę kaip lygtį (!)
   $y = 3x + 1$.
3. Su lygtimis mes galime atlikinėti tam tikrus leistinus veiksmus. Perkelkime narį su x į kairiąją lygybės pusę, o narį su y — į dešiniąją:
   $-3x = -y + 1$.
4. Padauginkime abi lygybės puses iš -1:
   $3x = y - 1$.
5. Padalykime abi lygybės puses iš 3:
   $x = \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}$.
6. Dabar lygybe $x = \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}$ galime apibrėžti atvirkštinę funkciją, nes
   $f(x) = f(\frac{1}{3}y - \frac{1}{3}) = 3(\frac{1}{3}y - \frac{1}{3}) + 1 = y - 1 + 1 = y$.

Pirmąją užduoties dalį atlikome. Antroji dalis reikalauja nubraižyti abiejų funkcijų grafikus. Kokių funkcijų? Tikriausiai, tiesioginės $y = 3x + 1$ ir atvirkštinės $x = \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}$. Bet mes atlikome su lygtimis veiksmus, kurie nekeičia sprendinių aibės. Vadinasi, aibė taškų $(x; y)$, tenkinančių visas lygtis, yra ta pati. Taigi *funkcijų* $y = 3x + 1$ *ir* $x = \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}$ *grafikai yra ta pati tiesė* (1 pav.), einanti per taškus (0; 1) ir (1; 4). Suprantama, funkcijos $x = g(y) = \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}$ grafiku laikome aibę taškų $(g(y); y)$, $y \in D_g$. Reikia manyti, kad knygos autoriai tikėjosi ne tokio atsakymo.



1 pav.

Pirmojo laipsnio funkcijų pavyzdžiais buvo galima pademonstruoti visą problemos esmę — išspręsti lygtį, įrodyti, kad gautasis sprendinys yra atvirkštinė funkcija, kad tiesioginės ir atvirkštinės funkcijų grafikas yra tas pats. Grafike keičiasi tik kintamųjų pobūdis. Tai labai tiksliai pasakyta pirmajame sakinyje po apibrėžimo:

Kintamasis y yra atvirkštinės funkcijos nepriklausomas kintamasis, o x — priklausomas kintamasis.

Nagrinėkime toliau. Skyrelio „Atvirkštinė funkcija“ kulminacija yra teiginys (p. 133):

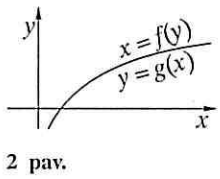
Jei funkcija $f(x)$ turi atvirkštinę funkciją $g(x)$, tai kiekvieną $f(x)$ grafiko tašką atitinka tiesės $y = x$ atžvilgiu simetriškas funkcijos $g(x)$ grafiko taškas. Funkcijos ir jai atvirkštinės funkcijos grafikai yra simetriški tiesės $y = x$ atžvilgiu.

Jau minėjau, kad to paties argumento funkcijos $y = g(x)$ ir $y = f(x)$ negali būti viena kitai atvirkštinės, nes tiesioginės ir atvirkštinės funkcijų „veikimo kryptys“ yra priešingos. Tai labai gražiai pavaizduota pirmuose dviejuose paveikslėliuose. Kam jie tada nupiešti?

Suvokus, kad (tiesioginės) funkcijos $y = f(x)$ ir jai atvirkštinės $x = g(y)$ (arba $x = f^{-1}(y)$) *grafikas yra tas pats*, gyvenimas labai supaprastėtų.

Tačiau ką daryti, jei labai norime nubraižyti funkcijos $y = g(x)$ grafiką, t. y. kad nepriklausomas argumentas būtų horizontalioje abscisių ašyje? Tai galima atlikti dviem būdais.

1. Jei funkcija $x = g(y)$ yra funkcijos $y = f(x)$ atvirkštinė, tai $y = g(x)$ yra funkcijos $x = f(y)$ atvirkštinė, t. y. *pakeičiame argumentų žymenis*, tačiau *abiejose funkcijose kartu*. Jei mokame braižyti funkcijos $y = f(x)$ grafiką, tai nubraižysime ir funkcijos $x = f(y)$ grafiką. Tai ir bus ieškomasis grafikas (2 pav.)



2 pav.

2. Galimas ir kitas sudėtingesnis būdas. Tačiau pirmiausia reikia įrodyti tokį teiginį.

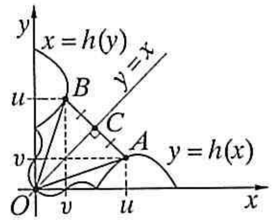
Teiginys. *Sakykime, turime dvi funkcijas:*

- $y = h(x)$, $x \in I$,
- $x = h(y)$, $y \in I$.

Šių funkcijų grafikai yra simetriški tiesės $y = x$ *atžvilgiu.*

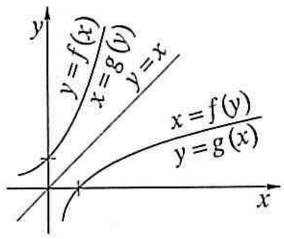
Įrodymas. Imkime bet kokį $u \in I$. Tada taškas $(u; v)$, $v = h(u)$ bus pirmosios funkcijos, o $(v; u)$ — antrosios funkcijos grafiko taškai. Pažymėkime $A = (u; v)$, $B = (v; u)$, $O = (0; 0)$. Tada (3 pav.):

- Trikampis OAB lygiašonis, nes $OA = OB = \sqrt{u^2 + v^2}$.
- Atkarpos AB vidurio taškas $C = (\frac{u+v}{2}; \frac{u+v}{2})$ yra tiesėje $y = x$.
- Lygiašonio trikampio OAB pusiaukraštinė OC yra ir jo aukštinė.
- Vadinasi, taškai A ir B yra simetriški tiesės $y = x$ atžvilgiu.



3 pav.

Kaip matome, šis teiginys visiškai nesusijęs su kokiomis nors atvirkštinėmis funkcijomis, kaip įrodinėjama 132 puslapio pabaigoje. Funkcijai h nekeliama jokių sąlygų. Teiginio vertė yra lygiai tokia pati, kaip ir kito paprasto teiginio, kad funkcijų $y = f(x)$ ir $y = -f(x)$ grafikai yra simetriški abscisių ašies atžvilgiu. Užduoties pabaiga visiems aiški — braižome funkcijos $y = f(x)$ grafiką. Funkcija $x = g(y)$ yra atvirkštinė funkcijai $y = f(x)$, o jų grafikas yra tas pats. Tada funkcijų $y = g(x)$ ir $x = g(y)$ grafikai simetriški tiesės $y = x$ atžvilgiu. Labai panašiai kaip ir vadovėlyje. Tik visa bėda, kad funkcijos $y = g(x)$ ir $y = f(x)$ nėra viena kitai atvirkštinės. Tai matyti iš 4 paveikslo.



4 pav.

Vadovėlio autoriai šiame skyrelyje vaikosi kažkokios mistiškos vizijos. Jie yra labai paplitusių matematikų visuomenėje stereotipų nelaisvėje. Kai idėja klaidinga, tai jai „pagrįsti“ sunaudojama labai daug energijos, o rezultatai abejotini. Gal šis straipsnelis padės demistifikuoti atvirkštinės funkcijos bei jos grafiko sampratą? Tai sutaupytų rašančiųjų, o dar svarbiau — skaitančiųjų energiją.