$\alpha + \omega$, 2002, Nr. 3, 37–42

Kaip padalyti saldainius

Aleksandras Plikusas
plikusas@ktl.mii.lt

Ankstesniame žurnalo numeryje siūlėme skaitytojams pabandyti išspręsti tokį uždavinį:

Ant stalo vazelėje yra keturių rūšių saldainių: šokoladinių, karamelinių, marmeladinių ir mėtinių. Keliais būdais iš vazelės galima paimti 7 saldainius?

Šį kartą į kvietimą atsiliepė tik šio straipsnio autorius.

Aš esu tiktai vienas, bet vis dėlto esu. Aš negaliu padaryti visko, bet vis dėlto kai ką galiu nuveikti. Aš neatsisakysiu padaryti tai, ką galiu.

Helen Keller

Tai mokinių, sprendžiančių kombinatorikos uždavinius, laiško citata.

Dažnai tiek mokytojus, tiek mokinius tenka išgirsti sakant, kad kombinatorikos uždaviniai yra sunkūs, mokiniui net neįkandami. Kita vertus, yra vadovėlių bei mokomųjų priemonių, kur teigiama, kad kombinatorikos uždaviniai yra patys lengviausi, jiems spręsti nereikia žinoti daug teorijos, formulių. Matyt, teisybė slypi kažkur „tarp“. Kombinatorikos mokymas dažniausiai atrodo taip. Supažindinama su tam tikru junginių tipu: gretiniais, deriniais, net deriniais su pasikartojimais ir t. t. Pateikiamos tų junginių skaičiaus formulės. Pavyzdžiui, k-elemenčių derinių iš skirtingų n elementų aibės po k elementų yra

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Spręsdamas uždavinį, mokinys turi atpažinti junginių tipą, prisiminti tų junginių skaičiaus formulę ir, įrašęs į ją uždavinio sąlygos duomenis, gauti atsakymą. Sudėtingesniuose uždaviniuose reikia atpažinti kelis junginių tipus ir naudojant jau dvi ar daugiau formulių apskaičiuoti reikalaujamą junginių skaičių.

Mes siūlome daugiau dėmesio skirti paprastai perrankai. Daugelį standartinių kombinatorikos uždavinių galima spręsti kaip tyrimo uždavinius. Iš pradžių su „mažesniais skaičiais“, po to bandyti apibendrinti. Mažėjant matematikos pamokų, gal ir nereikėtų įvedinėti sudėtingesnių kombinatorikos sąvokų, pavyzdžiui, gretinių su pasikartojimais ar derinių su pasikartojimais. Pabandysime pasiūlyti kombinatorikos uždavinius spręsti minimaliai naudojantis formulėmis ar sąvokomis. Daugybos taisyklės ir derinių skaičiaus formulės tikrai turėtų pakakti mokykliniams kombinatorikos uždaviniams spręsti.

Šį straipsnelį parašyti iš dalies paskatino ir gautas moksleivių laiškas, kuriame rašoma:

Neseniai pradėjome mokytis iš „Kombinatorikos, tikimybių teorijos ir statistikos pradmenų“ vadovėlio. Norėtume paklausti vadovėlio autoriaus apie vieno uždavinio sprendimą, dėl kurio nesutaria net mūsų matematikos mokytojai.

Čia kalbama apie [1] vadovėlio 18 puslapyje pateiktą 32 uždavinį:

1 uždavinys. *Tris vienos rūšies ir du kitos rūšies saldainius reikia padalyti dviem vaikams, kad kiekvienas jų gautų bent vieną saldainį. Keliais būdais tai galima padaryti?*

Uždavinio sąlyga tikrai neatrodo grėsminga. Tikriausiai ir šeštos klasės mokiniai, nežinodami, kas yra kombinatorika, šį uždavinį išspręstų. Išsprendė jį ir laiško autoriai.

Pateikiame mokinių sprendimą. Vienos rūšies saldainius (jų yra trys) pažymėję A, o kitos (jų yra du) — B, galime surašyti visus saldainių dalijimo būdus:

Nr.	Pirmas vaikas	Antras vaikas
1	A	$AABB$
2	B	$AABB$
3	AA	ABB
4	AB	AAB
5	BB	ABB
6	AAA	BB
7	AAB	AB
8	ABB	AA
9	$AAAB$	B
10	$AABB$	A

Taigi atsakymas: saldainius galima padalyti 10 būdų. Uždavinio sprendimas visiškai teisingas ir jam neturėtų būti jokių priekaištų.

Tačiau, matyt, nei mokytojų, nei mokinių toks sprendimo būdas netenkino. Kaip galima uždavinį išspręsti be jokių formulių? Ir apskritai — kas čia kėliniai, gretiniai, deriniai, ... ar dar kas? Todėl toliau laiške rašoma:

O kiti sprendžia lengviau:

$$C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10.$$

Išspręsta greitai, atsakymas tas pats. (Čia, matyt, reikėtų suprasti, kad C_5^2 pasirinkta todėl, kad yra 5 saldainiai ir 2 vaikai.) O jei turėtume po du kiekvienos rūšies saldainius ir juos reikėtų padalyti dviem vaikams? Išrašę visus dalijimo būdus, lengvai randame, kad jų yra 7, bet $C_4^2 = 6 \neq 7$.

Suprantama, perrankos būdas tinka, kai atvejų nėra daug. Pavyzdžiui, jei A rūšies saldainių būtų 30, o B rūšies — 20, tikrai nuobodu išrašinėti padalijimo būdus. Tačiau perrankos būdas naudingas ne tik tuo, kad čia sunkiau suklysti. Dažnai (tai yra daug svarbiau) perranka padeda mums pastebėti dėsningumą, padedantį išspręsti uždavinį ir bendresniu atveju.

2 uždavinys. *Turime n_1 vienos rūšies ir n_2 kitos rūšies saldainių. Saldainius reikia padalyti dviem vaikams, kad kiekvienas jų gautų bent vieną saldainį. Keliais būdais tai galima padaryti?*

Sprendimas. Pastebėkime, kad pakanka suskaičiuoti, keliais būdais galima duoti saldainių vienam iš vaikų. (Antrasis vieninteliu būdu gauna likusius.) Jeigu leistume pirmajam vaikui gauti visus saldainius ir negauti nė vieno, tai dar du dalijimo būdai prisidėtų prie tų, kuriuos reikia rasti pagal uždavinio sąlygą. Dabar pirmosios rūšies saldainių vaikas gali gauti arba 0, arba 1, arba 2, ... , arba n_1, t. y. $n_1 + 1$ būdų. Kiekvienam iš tų $n_1 + 1$ būdų antrosios rūšies saldainių galima atseikėti arba 0, arba 1, arba 2, ... , arba n_2, t. y. $n_2 + 1$ būdų. Remiantis daugybos taisykle (arba tiesiog sveika nuovoka), iš viso turėtų būti $(n_1 + 1)(n_2 + 1)$ saldainių dalijimo būdų. Dabar prisiminkime, kad į šį skaičių įtraukti du uždavinio sąlygos netenkinantys būdai: kai vaikas gauna visus $n_1 + n_2$ saldainius ir kai iš viso saldainių negauna.

Atsakymas. Saldainius galima padalyti $(n_1 + 1)(n_2 + 1) - 2$ būdų.

3 uždavinys. *Ant stalo vazelėje yra keturių rūšių saldainių: šokoladinių, karamelinių, marmeladinių ir mėtinių. Keliais būdais iš vazelės galima paimti 7 saldainius?*

Komentaras. Šis uždavinys paimtas iš jau seniai klasikine tapusios elementariosios kombinatorikos N. Vilenkino [2] knygos, skirtos elementariajai kombinatorikai (žr. taip pat [3], p. 133). Jo reikia derinių su pasikartojimais sąvokai įvesti ir pademonstruoti jų skaičiaus formulės įrodymą atskiru atveju.

Uždavinys nelengvas, jei nesame girdėję apie derinius su pasikartojimais. Kita vertus, jei atpažįstame čia derinius su pasikartojimais ir žinome tokių derinių skaičiaus formulę, tai uždavinys beveik išspręstas.

Pateikiame šio uždavinio sprendimą perrankos būdu. Tarkime, kad žinome tik paprastus derinius iš n skirtingų elementų po k ir jų skaičiaus formulę. (Nors galėtume išsiversti ir be to.)

Uždavinio sąlygoje tiesiogiai nepasakyta, kad vazelėje (nors tai tik vazelė) tikrai yra bent po septynis kiekvienos rūšies saldainius. Tai laikoma savaime suprantamu dalyku, jei tik nepasakyta priešingai. Tam tikri nebylūs susitarimai tarsi sklando tarp uždavinių pateikėjų. Tad formuluojant tokius (galima sakyti, standartinius) uždavinius, ši svarbi sąlyga yra nutylima. Panašiai kaip ir formuluojant 1 uždavinio sąlygą nebuvo pasakyta, kad vaikui nesvarbu, kurį būtent iš tos pačios rūšies saldainių gauti. Kitaip sakant, pagal kitą nutylėjimą kombinatorikoje vienos rūšies viduje saldainiai niekuo nesiskiria. (Nors išvyniojus saldainius iš vienodų popieriukų gali pasirodyti, kad vienas sutrupėjęs, o kitas apkramtytas.)

Sprendimas. Pirmas būdas. Suskaidykime visus galimus 7 saldainių rinkinius į keturias dalis pagal rinkinyje esančių saldainių rūšių skaičių. Sakykime, kad septynių saldainių rinkinyje yra tik vienos rūšies saldainiai. Tokio tipo rinkinių yra tik 4, nes vieną saldainių rūšį galime pasirinkti keturiais būdais (arba C_4^1).

Dvi saldainių rūšis iš 4 galima pasirinkti $C_4^2 = 6$ būdais.

Tris saldainių rūšis iš 4 galima pasirinkti $C_4^3 = 4$ būdais.

Keturias saldainių rūšis iš 4 galima pasirinkti $C_4^4 = 1$ būdu.

Taigi lieka rasti, keliais būdais galima pasirinkti septynių saldainių rinkinį, jei jame yra: vienos rūšies saldainiai, dviejų rūšių saldainiai, trijų rūšių saldainiai, keturių rūšių saldainiai. Pažymėkime šiuos keturis skaičius atitinkamai R_1, R_2, R_3, R_4. Tada uždavinio atsakymas būtų

$$C_4^1 \cdot R_1 + C_4^2 \cdot R_2 + C_4^3 \cdot R_3 + C_4^4 \cdot R_4.$$

Akivaizdu, kad turint tik vienos rūšies saldainius, galima sudaryti tik vieną septynių saldainių rinkinį. Taigi $R_1 = 1$.

Skaičiuokime R_2. Pažymėję vienos rūšies saldainį A, o kitos — B, galime surašyti visus rinkinius:

$$\begin{array}{ll} AAAAAAB \text{ (arba } 6+1), & AAABBBB \text{ (arba } 3+4), \\ AAAAABB \text{ (arba } 5+2), & AABBBBB \text{ (arba } 2+5), \\ AAAABBB \text{ (arba } 4+3), & ABBBBBB \text{ (arba } 1+6). \end{array}$$

Taigi $R_2 = 6$. Pastebėsime, kad R_2 yra lygus skaičiui būdų, kuriais skaičių 7 galima išreikšti dviejų dėmenų, kai atsižvelgiama į dėmenų tvarką, suma.

Panašiai randame R_3:

$$\begin{array}{lllll} 1+1+5 & 2+1+4 & 3+1+3 & 4+1+2 & 5+1+1 \\ 1+2+4 & 2+2+3 & 3+2+1 & 4+2+1 & \\ 1+3+3 & 2+3+2 & 3+3+1 & & \\ 1+4+2 & 2+4+1 & & & \\ 1+5+1 & & & & \end{array}$$

(Čia pirmas dėmuo reiškia skaičių pirmos rūšies saldainių, antras — antrosios, o trečias — trečiosios.) Matome, kad $R_3 = 15$. Šiek tiek padirbėjus, nesunkiai galima rasti, kad $R_4 = 20$. Todėl iš keturių rūšių pasirinkti septynis saldainius galimybių yra

$$C_4^1 \cdot R_1 + C_4^2 \cdot R_2 + C_4^3 \cdot R_3 + C_4^4 \cdot R_4 = 4 \cdot 1 + 6 \cdot 6 + 4 \cdot 15 + 1 \cdot 20 = 120.$$

Uždavinys išspręstas.

Ieškodami R_1, R_2, R_3 ir R_4, mes faktiškai skaičiavome, keliais būdais skaičių 7 galima išreikšti vieno, dviejų, trijų ir keturių (aišku, natūraliųjų) skaičių suma. Išraiškos laikomos skirtingomis, jei skiriasi ne tik patys dėmenys, bet ir jų tvarka. Pavyzdžiui, mūsų atveju išraiškos $2 + 5 = 7$ ir $5 + 2 = 7$ yra skirtingos.

4 uždavinys. *Keliais būdais natūralųjį skaičių n galima išreikšti k natūraliųjų skaičių suma?*

Sprendimas. Iš pradžių imkime $k = 2$, t. y. bandykime skaičių n išreikšti dviejų dėmenų suma. Įsivaizduokime n vienetukų:

$$\underbrace{1\ 1\ 1\ 1\ 1\ \ldots\ 1}_{n}$$

Uždavinį galima performuluoti taip. Keliais būdais tuos vienetukus galima sudėti į dvi skirtingas dėžes? Arba dar kitaip. Keliais būdais tarp vienetukų galima įdėti pertvarą, kuri atskirtų du dėmenis? Pavyzdžiui:

$$1\ 1\ 1\ 1\ 1\ |\ 1\ 1 \quad \text{atitinka} \quad 5 + 2 = 7,$$

o

$$1\ 1\ |\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \quad \text{atitinka} \quad 2 + 5 = 7.$$

Tarp n vienetukų yra $n - 1$ tarpų, todėl pertvarą galima įdėti $n - 1$ būdų. Taigi yra $n - 1$ būdų skaičių n užrašyti dviejų dėmenų suma. Norint išreikšti k dėmenų suma, reikia į $n - 1$ tarpus įdėti $k - 1$ pertvarų. Tai galima padaryti C_{n-1}^{k-1} būdų.

Atsakymas. Natūralųjį skaičių n išreikšti k dėmenų suma galima C_{n-1}^{k-1} būdų.

3 uždavinį galime išspręsti ir kitaip. Kartu atskiru atveju įrodysime ir derinių su pasikartojimais formulę.

Antras būdas. Pažymėkime 7 saldainius vienetukais:

$$1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1.$$

Sakykime, kad visi vienos rūšies saldainiai yra sudėti šalia vienas prie kito, t. y. vienetukai, žymintys tos pačios rūšies saldainius, yra surašyti greta vienas kito. Į tarpus tarp skirtingos rūšies saldainius žyminčių vienetukų surašykime nuliukus. Kadangi yra keturios saldainių rūšys, mums prireiks trijų nuliukų rūšims viena nuo kitos atskirti. Sakykime, kad laikomės tokios tvarkos: pirmiausia surašome šokoladinius saldainius, po to karamelinius, po to marmeladinius ir gale mėtinius. Tada, pavyzdžiui, užrašas

$$1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0$$

reikštų, kad rinkinyje yra 2 šokoladiniai, 0 karamelinių, 5 marmeladiniai ir 0 mėtinių. Kiekvieną 7 saldainių rinkinį vieninteliu būdu galima taip užkoduoti. Kita vertus, kiekviena septynių vienetų ir trijų nulių eilutė reiškia kurį nors saldainių rinkinį. Taigi lieka rasti, kiek skirtingų septynių vienetų ir trijų nulių eilučių galima sudaryti. Kitaip sakant, keliais būdais į dešimt vietų galima įrašyti septynis vienetukus, arba keliais būdais iš dešimties skaičių galima pasirinkti septynis skirtingus skaičius. Tai yra derinių iš 10 po 7 skaičius: $C_{10}^{7} = C_{10}^{3} = 120$.

Atsakymas. Yra 120 skirtingų septynių saldainių rinkinių.

Pastebėsime, kad sprendžiant antru būdu pasinaudota idėja užrašyti saldainių rinkinius vienetukų ir nuliukų eilutėmis. Ši idėja atrodo paprasta, kai jau ją žinai. Sugalvoti nėra taip paprasta. Kaip jau minėjome, kartu įrodėme derinių su pasikartojimais formulę atskiru atveju, tačiau bendruoju atveju įrodymas niekuo nesiskiria.

Derinių su pasikartojimais skaičiaus formulė

Turint n skirtingų rūšių, ir jei kiekvienos rūšies elementų yra ne mažiau kaip k, skirtingų k-elemenčių rinkinių galima sudaryti

$$\overline{C}_{n}^{k} = C_{n+k-1}^{k}.$$

Trečiame uždavinyje elementų (t. y. saldainių) rūšių buvo 4 ($n = 4$). Skaičiavome, kiek skirtingų septynių ($k = 7$) saldainių rinkinių galima sudaryti, t. y. derinių iš keturių rūšių po septynis skaičių.

Trečias būdas. Ieškomas septynių saldainių rinkinių skaičius yra derinių su pasikartojimais iš 4 po 7 skaičius:

$$\overline{C}_{4}^{7} = C_{4+7-1}^{7} = C_{10}^{7} = C_{10}^{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120.$$

Sprendimas, kaip matome, visai trumpas. Tik ar jis moko kombinatorikos? Aišku, jei gerai žinome derinių su pasikartojimais sąvoką ir lengvai juos atpažįstame (t. y. jau pakankamai gerai mokame kombinatoriką), tai pastarasis sprendimo būdas tikrai racionalus.

5 uždavinys. *Ant stalo vazelėje yra septynių rūšių saldainių, pavyzdžiui, šokoladinių, karamelinių, marmeladinių, mėtinių ir kt. Keliais būdais iš vazelės galima paimti keturis saldainius?*

Sprendimas. Reikia rasti keturių elementų derinių su pasikartojimais iš septynių rūšių elementų skaičių:

$$\overline{C}_{7}^{4} = C_{7+4-1}^{4} = C_{10}^{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210.$$

Atsakymas: 210 būdų.

(Palyginkite 5 ir 3 uždavinius. Sukeitę sąlygoje 4 su 7, atsakymą gavome 210 vietoje 120. Gal tai dar paprastesnis sprendimo būdas?)

Kombinatorinių uždavinių gali būti labai įvairių. Ar tikslinga kiekvienam specialiam junginių tipui išvesti bei prisiminti kokią nors formulę apie to tipo junginių skaičių? Matėme, kad sprendžiant net paprastutį 1 uždavinį atsiranda neaiškumų ne tik mokiniams, bet ir mokytojams. Susidaro įspūdis, kad mokydami spręsti kombinatorikos uždavinius dažnai siūlome atspėti junginių tipą ir įrašyti sąlygoje duotus skaičius į pasirinktą formulę (žr. 1 uždavinio „alternatyvų“ sprendimą naudojantis formule C_{5}^{2}). O juk kombinatorikoje taip nesunku apsirikti. Vidutiniams ir silpnesniems mokiniams reikėtų daugiau spręsti perrankos uždavinių. Beveik kiekvieną uždavinį galima suprastinti taip, kad jį galėtų išspręsti kiekvienas norintis tai padaryti.

Kokie būtų perrankos būdo privalumai?

1. Perranka padeda geriau suprasti uždavinio sąlygoje nusakytą situaciją, net atpažinti junginių tipą, jei jis žinomas.

2. Naudojantis perranka ir daugybos taisykle galima nesunkiai išspręsti daugelį standartinių kombinatorikos uždavinių. Pavyzdžiui, kiek pasistengus lentoje galima surašyti visus įmanomus automobilių numerius. O išmokus atpažinti derinius ir žinant jų skaičiaus formulę, perrankas galima daug kartų sutrumpinti bei pagreitinti. Kita vertus, spręsdami uždavinį, kartu mokiniai gali nejučia įrodyti derinių skaičiaus formulę. Ir nebus labai nuskriausti niekada jos net nesužinoję.

3. Perranka (kad ir su mažesniais nei sąlygoje skaičiais) galima gauti teisingą atsakymą atskiru atveju, o dažai ir pasufleruoja sprendimą bendresniu atveju. Net ir silpnas mokinys gali išspręsti bent dalį uždavinio.

Sakoma kartais taip: jei negali išspręsti kokio nors uždavinio, visada yra lengvesnis, kurio taip pat negali išspręsti ir t. t. Gali atsitikti, kad galų gale kokį nors uždavinį pasiseks išspręsti, o po to gal pavyks išspręsti ir kai kuriuos kitus.

Suprantama, kombinatorikos uždavinių sprendimas perrankos būdu arba minimaliai naudojantis formulėmis turi savų trūkumų. Šis būdas reikalauja daugiau laiko, daugiau vietos užima sprendimas, ne visada pavyksta apibendrinti. Reikia tam tikrų mokytojo pastangų prastinant ar skaidant į dalis vadovėlyje pateiktą uždavinį. Perrankos būdu spręstą uždavinį sunkiau tikrinti. (Straipsnyje minimi vadovėliai nelabai skatina taikyti perrankos būdą.) Tačiau, nepaisant šių trūkumų, būtų nelengva paneigti nuomonę, kad naudojantis perranka geriau išmokstama kombinatorikos, nei formaliai žinant formules ir jas taikant.

1. A. Plikusas, *Kombinatorikos, tikimybių teorijos ir statistikos pradmenys*, Šviesa, Kaunas, 2000.
2. Н. Я. Виленкин, *Комбинаторика*, Наука, Москва, 1969.
3. R. D. Šileikienė ir kt. *Matematika*, 10 ir gimnazijų II klasei, I dalis, Šviesa, Kaunas, 2001.

RAŠYKITE MUMS

„Dialogas" 2002 m. Nr. 46 spausdino Biržų „Aušros" vidurinės mokyklos matematikos mokytojo A. Petronio laišką. „Dialogui" sutikus, spausdiname dalį to straipsnio.

Pažiūrėkime į matematikos egzaminus, kurie tampa neprognozuojami savo sunkumu, į jų užduotis, virstančias olimpiadų uždaviniais, kuriuos reikia išspręsti per 3 valandas. Laiko sprendimui skiriama nedaug. Atsakymų negalima „nuleisti iš dangaus", juos reikia pagrįsti teorija ir supratimu.

Kai reikia išspręsti daug uždavinių, kai kuriuos siūlau spręsti spartesniu metodu.

Ar turi funkcijų $y = 5x^2 - 2x + 3$ ir $y = x^2 + 2x + 2$ grafikai bendrą liestinę, nubrėžtą per jų bendrą tašką? Jei turi, tai parašykite šios liestinės lygtį.

Siūlau spręsti taip: $\begin{cases} y = 5x^2 - 2x + 3, \\ y = x^2 + 2x + 2 \mid \cdot (-5). \end{cases}$

Sudėkime taip, kad neliktų x^2: $\begin{cases} y = 5x^2 - 2x + 3, \\ -5y = -5x^2 - 10x - 10. \end{cases}$ $\quad \begin{aligned} -4y &= -12x - 7 \mid \cdot (-1), \\ 4y &= 12x + 7. \end{aligned}$

Pateiktas sprendimas man pasirodė keistas. Gal taip ir lengviau, bet ar iš tikrųjų taip galima spręsti? O jei galima, tai kaip paaiškinti mokiniui sprendimo esmę? O gal iš viso pateiktas sprendimas yra klaidingas? Laukiame laiškų.

Valdas Vanagas