

Matematikos estetika



Heiner Stauff

heiner@stauff.de

Straipsnio autorius — matematikos ir literatūros mokytojas. Savo esė jis rašo apie kitokį, nei daugeliui įprasta — estetiniu jausmu paremtą matematikos suvokimą. Autoriui sutikus, tekstą iš vokiečių kalbos išvertė V. Stakėnas. Daugiau autoriaus tekstų apie matematiką ir literatūrą galima rasti jo tinklalapyje <http://www.stauff.de>.

Matematiko kūriniai turi būti gražūs kaip dailininko ar poeto; idėjos turi harmoningai derintis kaip spalvos arba žodžiai. Grožis yra pirmasis išbandymas; negražiai matematikai nėra vietos pasaulyje.

Godfrey Harold Hardy

Sunku paaiškinti, kaip išsiplėtė matematika. Pats žodis „išsiplėtė“ yra netinkamas: aš įsivaizduoju gražių detalių pilnas tolas — ne monotonišką plynę, bet erdvę ir nuostabų kraštovaizdį, kuriuo iš pradžių gėrimasi iš tolo. Bet vėliau po jį pakeliauti ir patyrinėti visas jo ypatybes: kalvas, slėnius, upelius, uolas, medžius ir gėles. Tačiau grožį galima pajusti, bet ne paaiškinti. Tai teisinga ir matematikos teorijai.

Arthur Cayley

Tinkamai žvelgiant matematika atskleidžia ne tik tiesą bet ir aukščiausią grožį — šaltą ir griežtą tarsi skulptūros grožį, abejingą silpnosioms mūsų prigimties pusėms, neturinčią tapybos ar muzikos prašmatnumo, tačiau dvelkianti pakiliu tyrumu ir griežtu tobulumu, kurį gali atskleisti tik aukščiausias menas.

Bertrand Russell

Kad matematika gali būti estetiška, kad tikro matematiko požiūriu estetika gali būti jos aukščiausias tikslas, daugeliui nematematikų arba jai neprijaučiančių gali atrodyti nesuprantama ar net perdėta.

Mano požiūriu, tam yra dvi priežastys:

1) neįstengiama išsiaiškinti, kas šiame teoriniame ir sausame it kaulai moksle gali būti estetiško, t. y. gražaus;

2) kita bendresnė priežastis — iš visko (ypač iš matematikos?) tikimasi išorinio tikslingumo ir taikymų, taigi grožis kaip tikslas savaime nėra pripažįstamas.

Paprastai matematikai keliamas retorinis klausimas: „Kas man iš to, kur aš tai galiu pritaikyti, panaudoti?“ Paviršutiniškas atsakymas į šį retorinį klausimą skamba taip: „Niekur“. Paviršutiniškas jis yra todėl, kad kiekvienas gerai žino, jog matematika yra labai daug kur taikoma, ja remiasi visa mūsų techninė kultūra. Tačiau klausiant, kas man iš to, kur aš tai panaudosiu, tikriausiai visai neabejojama dėl bendrų matematikos taikymų, tik abejojama dėl savo gebėjimų. Juk vienas profesorius iš Bylefeldo „atrado“, kad vidutinis žmogus „normaliame“ gyvenime naudoja geriausiai atveju tokia matematika, kurios mokoma iki septintos klasės, taigi pagrindiniais skaičiavimo įgūdžiais, lygčių teorijos elementais ir procentų skaičiavimu.

Retorinis klausimas apie matematikos pritaikomumą tarsi savaime diktuoja tokį atsakymą: „Žinoma, matematiką galima pritaikyti, tačiau tai daro kiti, ne aš; aš nesu toks sumanus (arba nenoriu

to daryti).“ Tai dažnai padvelkia rezignacija, kad viską išmano uždara ekspertokratija, į kurią neįmanoma patekti (pasiteisinimas: ir mano senelė matematikos neišmanė).

Klausimas apie matematikos naudą ir galimybę ją suprasti, taip pat ta aplinkybė, kad matematika mokykloje yra vienas iš nemėgstamiausių dalykų, mano nuomone, atskleidžia esminę problemą — gana pagrįstą nepasitenkinimą:

- teorine mūsų ekspertų kultūra;
- dominuojančiu abstrakčiu pasaulio aiškinimu;
- šalta lyg ledas supaprastinta dvireikšmė logika: visiškai teisinga arba visiškai neteisinga — ir nieko per vidurį;
- „liesa“ (iš pažiūros) formulių estetika.

Atkreipkime dėmesį į dažnai pasitaikantį prieštaravimą: viena vertus, neišmanantys matematikos dažnai reikalauja, kad ji būtų taikoma, kita vertus, kaip tik šis visuotinis tikrovės matematizavimas jiems ir trukdo. Juk kaip tik dažnai nemėgstantys matematikos labiausiai ją ir gerbia. Gal tai yra kur kas labiau paplitusios dabartinės „šizofrenijos“ atšaka: kaip tik tie, kas daugiausia naudojami sistema, ją aršiausiai ir vienpusiškai kritikuoja. Pavyzdžiui, labai dažnai vienoje galvoje gerai dera technicizmas ir priešiškusis technikai, modernusis (Mančesterio) kapitalizmas ir feodalizmo nostalgija, racionalizmas ir antiracionalizmas (pvz., ezoterika).

Aš nelaikau to mūsų laikų liga. Esu labiau linkęs manyti, kad nuo pat praeito amžiaus, jei ne nuo naujųjų laikų, pradžios, o gal net nuo senosios Graikijos laikų egzistuoja ši praraja, anot Froido, šis „nejaukumas kultūroje“. Kita vertus, tai galbūt yra natūrali sudėtingos, vienareikšmiškai ir neprieštarinčiai nepaaiškinamos tikrovės išdava. Juk nepaisydami žinojimo, kad Saulė yra mūsų astronominės sistemos centras, kasdienybėje naudojamės geocentrinės sistemos įvaizdžiais: sakome, kad Saulė pakyla, Mėnulio fazes aiškiname, tarsi Žemė būtų nejudantis kūnas.

Trūksta visuotinio žinių sąryšio. Jo jau taip paprastai nebeįmanoma atkurti. Ir vis dėlto aš manau, kad būtina reaguoti į tai, kad dėl šios „šizofrenijos“ žmonės savotiškai kenčia.

Būtina suvokti, kodėl matematika iš viso tapo mokykloje dėstomu dalyku (juk naivu galvoti, kad dabartinė dalykų sistema yra savaime suprantama ir besąlygiška). Matematika suteikia tam tikrus logiško ir formalaus mąstymo įgūdžius, tam tikrą tikrovės suvokimo būdą (geriausiu atveju išmoko nepriklausomai ir kritiškai mąstyti, parodo šio tikrovės suvokimo galimybes ir ribas). Taigi matematika, kaip ir visos kitos mokyklinės disciplinos, turi tam tikrą tikslų, kurie nėra visiškai akivaizdūs ir aiškūs.

Aš būtinai norėčiau pabrėžti, kad matematikos, kaip ir kitų dalykų, vertė ir santykinumas išryškėja lyginant ją su kitomis mokyklinėmis disciplinomis. Beveik visi mokykliniai dalykai siekia grynai pažintinių tikslų, tai yra svarbu, tačiau kartu ir vienpusiška. Priemonė prieš tokį pažintinį perkrovimą ir yra būtent estetika.

Taigi verta pamąstyti, koks mokyklinės matematikos ir mano minėtos „šizofrenijos“ ryšys, kaip viena skatina kitą.

Juk nėra galutinai nutarta, kad mokyklinė matematika ir turi būti tokia, kokia ji „kepama“ mokyklose (mokytojai tiesiog kitaip nesimokė, koks matematikos mokytojas gali pasigirti, pavyzdžiui, filosofijos ar matematikos istorijos žiniomis).

Tačiau dėl to, kad matematika yra nemėgstamiausias dalykas ir daugiausia nepažangių mokinių būna dėl jos, nėra tik pačios matematikos ar atskirų mokytojų kaltė. Viena vertus, taip keršija mano minėtoji bendroji kultūrinė šizofrenija (netgi, sakyčiau, tai perkrautų kultūra neišmanėlių kerštas), kita vertus, dažnai neįmanoma įveikti įsigalėjusių banalių išankstinių matematikos atžvilgiu nuostatų.

Kaip ir kitiems dalykams, matematikai trukdo tai, kad ji yra mokyklinė disciplina, iš esmės meilės eilėraščius ar Pitagoro teoremą naudoti kaip egzaminio medžiagą yra skandalinga! Ne-nuostabu, kad tokiomis aplinkybėmis į šiuos dalykus žiūrima tik kaip į egzaminio klausimus ir prievartos įrankius.

Turi būti aišku, kad mokyklinė matematika dažnai (ypač dėl vienpusiškų programų ir jomis besivadovaujančių mokytojų kaltės) formuoja vienpusiškus mokinius. Drįsčiau tvirtinti — dažnai ugdo ne tikruosius, t. y. atvirus ir estetika besivadovaujančius, matematikus, bet siauro akiračio, šaltus, beveik sakyčiau — netinkamus gyvenimui, kuriems matematikos griežtumas yra tas paskutinis šiaudas, ant kurio kybo jų skurdus, nekūrybingas gyvenimas, kurie viską vertina pasitelkdami dvireikšmę logiką ir įrodymus. Verta atkreipti dėmesį, kad būtent tie moksleiviai, kurie yra geri matematikai, nagrinėja meilės eilėraščius pasitelkę sausą išsąradingumą.

Stebėtina, kad būtent geri (iš pažiūros) matematikai mažiausiai linkę pradėti pažintinio, istorinio ar net estetinio pobūdžio diskusiją apie matematikos pagrindus, dažnai netgi reaguoja į ją su nepasitenkinimu. Galima justi jų netikrumą: kad tik keliant klausimą apie pagrindus ir matematikos visuomeninę padėtį nebūtų išmuštas jiems iš po kojų tvirtas pamatas. Jie neprisimena, kad Godelis, įrodęs, jog matematinės sistemos tam tikra prasme yra prieštaringos, taip pat buvo matematikas.

Reikia atsižvelgti į dar vieną mokyklinės matematikos prieštarumą: viena vertus, ji yra (siaurąja prasme) paprasčiausias ir logiškiausias iš visų dalykų, kita vertus, reikalauja labai didelės visumos įgūdžių (dažnai ne tik matematinių), kurie tiesiog sluoksniuojami vienas ant kito. Pavyzdžiui, kas neįgijo trupmenų skaičiavimo įgūdžių, tas turės sunkumų iki pat mokyklos baigimo. Matematika taip pat reikalauja nematematinių įgūdžių, pavyzdžiui, absoliučios tvarkos („drausmės ir tvarkos“ — antrinių dorybių, kurias turėjo ir koncentracijos stovyklų steigėjai).

Suvokime, kiek daug reikalaujama iš menką patirtį turinčio aštuntoko, kai jam liepiama suprastinti nevysiškai paprastą reiškinį:

$$3 \cdot \left(\left(\frac{1}{3} \right) x - \left(\frac{3}{2} \right) y \right)^2 - \left(- \left(\frac{3}{2} \right) x + 4y \right) (x - 2)(-5).$$

Man atrodo, kad tokie reiškiniai ir jų prastinimo pratimai neatitinka vidutinio aštuntoko pažintinių gebėjimų. Pažvelgus į šį pratimą, peršasi mintis, kad jis pateiktas ne tiek patikrinti būtinus įgūdžius, kiek apgauti moksleivį. Įprastu būdu suprastintas reiškinys

$$\frac{43}{6}x^2 + 15x + 17xy + 40y + \frac{27}{4}y^2$$

aštuntokui visiškai neatrodo paprastesnis už pradinį, galbūt dėl tokių trupmenų netgi sudėtingesnis. Iš kur jis gali žinoti, ką daryti? Kas supaprastėja, kai panaikinami skliaustai? Galbūt priešingai — paprasčiau yra su skliaustais (kaip formulėje $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$)?

Ne paslaptis, kad aštuntokai skaičiuodami dažnai nesupranta, ką daro (kad ir laikydamiesi tam tikros logikos ir tikrai stengdamiesi). Ir net tie iš jų, kurie yra „geri“ matematikai, įvaldę skaičiavimo būdus, dažnai nežino, ką daro. Kai kurie iš jų ypač mėgsta (beprasmius?) galvosūkius. Kartais negali atsikratyti jausmo, kad jie yra labiausiai riboti žmonės. Jiems galima būtų duoti nuobodžiausius darbus (spręsti kryžiažodžius, dėti dėlionės iš 5000 dalių). Ar nebūtų geriau vengti tokių reiškinų pertvarkymų?

Tenka pripažinti, kad tokių nuobodžių reiškinų pertvarkymo etiudų visiškai išvengti negalima (todėl aš skeptiškai vertinu naujausių kompiuterių naudojimą šiam tikslui). Pervarkant reiškinius, atsiranda tam tikri įgūdžiai, kurių prireiks vėliau studijuojant matematiką. Tačiau moksleiviai

nežino to tolimo tikslo, taigi neturi reikiamos motyvacijos. Vis dėlto jaučiu, kad kūrybiškumas užgniaužiamas jau atliekant šiuos paruošiamuosius darbus. Kas vėliau žavėsis tikrąja matematika?

Matematika negali visada būti įdomi ir vaizdi, tačiau, kiek tik įmanoma, tokia turi būti.

Kaip galima spręsti šią gal kiek perdėtai užaštrintą problemą? Vertėtų laikytis šių nuostatų:

- 1) geriau, suprantamiau aiškinti;
- 2) tai daryti kuo vaizdžiau. (Modeliai, susiję su realybe, yra problema; jie dažnai sudėtingesni už pačią matematiką, nes tikrovė nėra tokia vienareikšmė ir lengvai matematizuojama...);
- 3) nuolat pabrėžti vidinius matematikos ryšius (tiek užbėgant į priekį, tiek sugrįžtant atgal);
- 4) aptarti visuomeninę matematikos padėtį, jos nepaprastą efektyvumą ir lemtingą modelių ribotumą. (Šis, kartu ir kiti filosofiniai klausimai kyla jau aštuntoje klasėje. Kartais man kyla noras juos iškelti ir nebežaisti slėpynių. Pavyzdžiui, nustoti kartoti „*non scholae sed vitae discimus*“, bet tiesiai šviesiai ištarti: „To jums neprireiks niekur, tik kitam kontroliniam darbui, pažymiui ir abitūros egzaminui.“);
- 5) parodyti matematikos istoriškumą (atskleisti, kad ji visada buvo tam tikro laikotarpio pasaulėžiūros kūdikis, šią pasaulėžiūrą skatino, papildė ir reiškė. Manau, kad matematika dėstoma labai neistoriškai. Daugeliui ji tarsi su Dievo plaktuku įkalama į galvą, kartu pribloškiant: „Aš niekada pats nebūčiau to sugalvojęs.“);
- 6) atskleisti vidinį matematikos grožį, estetiką. (Kaipgi kitaip mokiniams galima perteikti pasaulėjautą tikro matematiko, kuriam visi taikymai nėra svarbūs, kuriam rūpi tik vidinis matematikos grožis kaip savaime svarbus tikslas?) Kaip pažadinti nuostabą, kad matematika galima pasikliauti ten, kur jau nebeįmanomas joks vaizdumas, kai matematika tampa septintuoju pojūčiu?

Visi šie klausimai susiję su diskusija apie „meną menui“, su betikslinio meno ir pažinimo pagrindų problemomis.

Iš esmės aš tik dabar priartėjau prie savo temos — požiūrio į matematiką kaip į vieną iš meno formų.

Tačiau dar norėčiau kiek grįžti prie 1)–6) nuostatų. Man atrodo, kad remiantis jomis būtina sumažinti mokyklinės matematikos apimtį. Pavyzdžiui, yra visiškai nepateisinama, kai prieš pat abitūros egzaminus, be jokios motyvacijos, prasmės, įrodymų ir taikymo pavyzdžių išdėstomos rodiklinės funkcijos — vien tik tam, kad tai numatyta programose.

Mano nuomone, mažiau reikėtų daugiau: kas iš tikrųjų suprato laipsninių funkcijų išvestines, tas tikriausiai supras ir rodiklinių funkcijų, o gal ir pats sugebės jas išsiaiškinti (tai yra esminis siektinas gebėjimas).

Kai kuriems klausimams nagrinėti reikia skirti kur kas daugiau laiko: viena vertus, reikia daugiau pavyzdžių (taip pat ir išimtis: rodiklinių funkcijų išvestinės skaičiuojamos visiškai kitaip nei laipsninių). Kita vertus, aš teigčiau dar radikaliau: kas iš tikrųjų „suprato Pitagorą“ ir šaknis (taigi ir iracionalumą), tas pasiėmė iš mokyklinės matematikos viską, kas yra svarbiausia.

Su įrodymu, kad šaknis iš dviejų yra iracionalusis skaičius, galima susieti svarbiausias antikos filosofijos problemas! Ir priešingai, išmetant, kaip kartais siūloma, iš mokyklos „Pitagorą“, galima kartu prarasti ir visą kultūros istorijos klodą (kaip lengva ranka buvo atsisakyta lotynų kalbos).

Minėtas klausimas apie matematiką, neturinčią „naudingų“ tikslų, turi savo atitikmenis visuose menuose. Ir kituose menuose svarstomi, mano nuomone, iš pat pradžių klaidingai iškelti klausimai:

- kokia iš to nauda (jokia, bent jau ne tokia, kokią būtų galima vienareikšmiškai nurodyti!);
- ką mums poetas norėjo tuo pasakyti (tikriausia visiškai nieko!);
- aš nesuprantu šio meninininko (čia ir nėra ko suprasti, bent jau buitine prasme; Leonardo da Vinči Monos Lizos taip pat negalima niekaip suprasti!).

Tačiau kur gali slypėti matematikos estetika, iš ko ji susideda?

Štai keli, be abejonės, subjektyvūs, galvojant apie matematiką suformuluoti estetiniai kriterijai:

- 1) meno kūrinys visų pirma turi džiuginti, santykis su juo turi teikti malonumo, skatinti;
- 2) džiaugsmą dažniausiai kelia paprastumas lyginant jį su išorinio pasaulio chaosu;
- 3) meno kūrinys turi atskleisti vidinę harmoningą tvarką, struktūrą (modernusis menas dažnai vaizduoja priešingą dalyką — chaosą);
- 4) kartu meno kūrinys (priešingai nei banali literatūra) turi kelti nuostabą;
- 5) tikrasis menas yra grynas žaidimas (anot Šilerio, žmogus tik tada yra tikras žmogus, kai žaidžia);
- 6) meno kūrinys turi būti atviras, taigi žadinantis;
- 7) meno kūrinys turi skatinti vidinį išsivadavimą (anot Rilke, tu gali ir turi pasikeisti), taigi skatinti gebėjimus;
- 8) meno kūrinys turi gerbti paslaptį, tai jo tikrasis tikslas: parodyti paslaptį, bet neišplepėti jos ir nesugriauti;
- 9) galų gale atsisakymas siekti naudingo tikslo yra meno prigimtis, visa kita yra „prakeikta pareiga“.

Prieš imdamiesi šiuos kriterijus nagrinėti, kartu su Nyče išskirkime dvi gyvenimo ir meno formas, kurios tarsi Jing ir Jang papildo ir užbaigia viena kitą, apskritai abi kartu sudaro tikrovę. Viena vertus, tai apoloniškasis, t. y. proto principais pagrįstas, menas, kita vertus — dioniziškasis, t. y. emocingasis, kūniškasis menas.

Matematika yra apoloniškasis menas, jeigu ji iš viso yra menas. Ir vis dėlto net joje, jos vyksme yra dioniziškų elementų. Galima stipriai trokšti išspręsti matematinę problemą ir, kai tai pavyksta, pajusti intelektualinį pasitenkinimą (mane visada stebina, kad daugelis kultūros laimėjimų neįstengia žmonių sujaudinti). Kai iš džiaugsmo šokinėja širdis — tai tikras juslinis išgyvenimas!

Grįžkime prie suformuluotų estetinių kriterijų ir patikrinkime, ar jie tinka matematikai. Pradėkime nuo svarbiausiojo principo: meno kūrinys turi visų pirma džiuginti, santykis su juo turi kelti susidomėjimą.

Čia sąmoningai pabrėžiamas pats procesas: matematikoje dažnai labiau domina ne tiek faktas (sukurtas įrodymas), kiek jo ieškojimo procesas. Galimos dvi baigtys: vilčių žlugimas (tačiau procesas teikė malonumo) arba visas pastangas vainikuojantis rezultatas.

Vadinasi, mokykloje neturi būti pateikiami vien galutiniai rezultatai (kaip dažniausiai būna), tačiau turi būti suteikta galimybė pačiam rasti arba bent jau savarankiškai išsiaiškinti (tarsi pats juos atskleidamas galėčiau pasijusti toks pat protingas kaip Euklidas!). Turiu pats turėti galimybę sušukti „Eureka!“

Žinoma, neįmanoma ir nereikia kartoti visų atradimų (jų yra per daug, visko negali aprėpti net genijai). Tie atradimai — tai protėvių dovana mums. Tačiau atkartodami jų kelią mes pagerbiame jų pastangas, kita vertus, tas atradimų kartojimas gali būti labai įdomus. Ribos sąvokos atradimo istorija gali būti tokia pat jaudinanti kaip didžiųjų geografinių atradimų (tarsi aš mąstyčiau kartu su Niutonu).

Kad tokiems atradimų kartojimams liktų laiko, matematika turi būti kasdienybės dalimi, iš jos išaugti. Didieji atradimai nepadaromi per 45 minučių pamoką mokykloje, jie netikėtai išnyra iš kasdienybės, iš šalies. Pavyzdžiui, paprasčiausiai išėjus pasivaikščioti staiga švysteli uždavinio sprendimas, tarsi mūzos bučiny, atlygis už kelias valandas mąstymo apie matematinę problemą be jokio apčiuopiamo rezultato.

Matematikos estetikos dalis yra ir tam tikra pažinimo dramaturgija. Kai medžiaga pateikiama išbaigta ar net sutrumpinta forma, jokio dramatizmo jau nebėra. Geriausiu atveju mokiniai gali išmokyti gerai skaičiuoti, tačiau, kuo tie rezultatai tokie nuostabūs, jie nepajus. Pavyzdžiui, jie nepastebės, kaip visos įrodymo gijos nuostabiai susiveja į vieną ir lentoje atsiranda būtent tai, ką norėjome įrodyti. Žinoma, kad galėtum daryti atradimus, turi būti pasiruošęs nesėkmei, kantriai bandyti iš naujo, be to, turi būti įvaldęs tam tikrus įrankius. Tačiau kiekvienoje pakopoje turi būti išgyvenami nedideli sėkmės džiaugsmas.

Ir čia pasirodo: kai įdomus pats procesas, nebėra svarbu vien tik tai, ar rezultatai bus kam nors naudingi ir pritaikomi.

Matematika, kaip ir bet kurie kiti intensyvūs užsiėmimai, yra siekimas įtvirtinti save po asetiškos kovos su savimi. Tačiau yra dar kai kas (panašiai kaip dirbant kompiuteriais): azartas perprasti ir įveikti problemą (aš nepasiduosiu kažkokiam kompiuteriui, kažkokiam algebriniam reiškiniui).

Viena iš matematikos priedermių kaip tik ir yra parodyti, kad žmogus yra pranašesnis už kompiuterį. Kad ir kaip stebėtini yra dirbtinio intelekto laimėjimai ir iš tiesų įspūdingos naujų kompiuterių galimybės, jie juk tėra paprasti skaičiuokliai. Jie negali — tai būtina pabrėžti — to, ką gali paprasčiausias šeštokas — visų pirma įsivaizduoti.

Taip pat gali būti įdomu tiesiog žongliruoti formulėmis. Mes turime džiūgauti, kad per paskutinį šimtmetį sukurta glausta formulių kalba ir mums nebereikia kaip anksčiau visko nusakyti kasdienės kalbos žodžiais.

Kita vertus, ši formulių kalba turi slaptaraščio žavesio, jos ženklai gali būti estetiški, pavyzdžiui, Σ , $\int$, $\sqrt{\quad}$. Taip pat stebėtina, kad daugelis skaitmenų (taip pat ir raidžių) yra simetriškos formos. Nenuostabu, kad tokia formulių kalba dažnai naudojasi skaičių kabalistika.

Ši formulių kalba nėra tik uždaros, ezoterinės ir arogantiškos matematikų bendrijos atskirumo ženklas, kaip tik priešingai — ji buvo sugalvota kaip pasaulio (bent jau vakarų) kalba. Man visiškai neatrodo absurdiška pitagoriečių idėja, kad net Dievas kalba ir kuria matematine kalba. Matematikoje, nepaisant jos vidinių prieštaravimų, yra kažko nenuginčijamo.

Ši formulių kalba suteikia galimybę paliesti paslaptį ir kartu ją išsaugo. Kas yra $\sqrt{2}$ — nežinia (kažkas įstrižo; tokiais dalykais kaip apytikslė skaičiaus reikšmė, kuria operuoja kvaili kompiuteriai, tikras matematikas visiškai nesidomi). Tačiau ar nekeista, kad sudauginę du tokius „įstrižus“ skaičius $\sqrt{2}$ gauname visiškai paprastą skaičių 2. Taigi matematikai kažkaip sugeba mąstyti užuolankomis ir sudėtingus dalykus stebuklingai paversti paprastais.

Beje, matematikos estetikos sričiai priklauso ir polinkis „nesusitepant rankų“ artėti prie reikalo užuolankom: pavyzdžiui, parabolės liestinė nenubrėžiama tiesiogiai, tačiau apibrėžiama kaip kirstinių riba.

Arba vėl — tikras nuostabos vertas spektaklis, kai kas nors labai sudėtingą įrodymą išdėsto keliomis gražiai simetriškais eilutėmis.

Taip pat kvapą gniaužiantį jaudulį galima išgyventi, kai staiga įrodymas užsibaigia, ypač, jeigu jautiesi pirmas jį sukūręs. Tada tarsi menininkas gali pajusti „mūzos bučinį“: apie įrodymą jau nebegalvoji kaip apie savo nuopelną, veikiau kaip apie Dievo dovaną, ir stebiesi „dieviška“ nenusipėjama matematikos logika. Panašiai jautiesi, kai po ilgų ir sudėtingų skaičiavimų viskas susiprastina ir staiga išryškėja paprasti rezultatai.

Tačiau gali apstulbinti ir priešingas dalykas: kai jau paprasčiausiuose geometriniuose sąryšiuose pasirodo iracionalieji skaičiai; pavyzdžiui, paprasčiausio kvadratinio stalo, kurio kraštinės ilgis lygus 1 m, įstrižainės ilgis yra $\sqrt{2} = 1,4142\dots$ metrų: iracionalusis skaičius, kuris neperiodiškai tęsiasi be galo, tarsi gyvatė gyvena savo gyvenimą; tęsiasi ir po šimtojo, ir po tūkstantojo skaitmens

nepriklausomai nuo to, ką mes apie tai žinome. Šis skaičius yra tarsi vaikas: galbūt jis ir gimė per mus, tačiau gyvena savo gyvenimą, kurio lemti mes jau negalime.

„Iracionalumo“ sąvokoje yra ir šis metafizinis aspektas, kad ir kaip būtų menkinama jo reikšmė.

Apskritai man atrodo, kad tikras matematikas turi nepaliumti stebėtis ir nemanyti, kad iracionalumo sąvoka yra galutinai išaiškinta. Tai tarsi paradoksas: stalo įstrižainės ilgis yra fiksuotas, „užbaigtas“, o jį reiškiantis skaičius — tarsi žiurkės uodega ilgėja ir ilgėja, tačiau neperžengia tam tikros reikšmės.

Neturėtume liautis stebėtis ir įrodymais: tiesmukas matematikas jau visiškai nesistebi įrodymų galimybėmis, jis apskritai atmeta viską, kas nėra matematiškai įrodoma. Tačiau įrodymai funkcionuoja ir kitaip: iš esmės įrodymai tam tikra prasme yra savitiksliai. Dažnai, naudojantis indukcija ar priešara, jie kuriami ne vien tam, kad būtų atskleisti nauji nežinomi ryšiai, bet kad jais remiantis vėl ir vėl būtų švenčiama sena, nuostabą ir pasigėrėjimą kelianti įrodymo šventė.

Koks estetiškas gali būti įrodymas, kaip ilgai gali būti jo ieškoma (nors faktas, kuris įrodinėjamas, yra jau seniai įrodytas), apskritai — kas sausame matematiniame įrodyme gali būti estetiško, daugeliu pavyzdžių parodė Martinas Aigneris ir Giunteris Ziegleris savo knygoje „Įrodymai iš KNYGOS“.

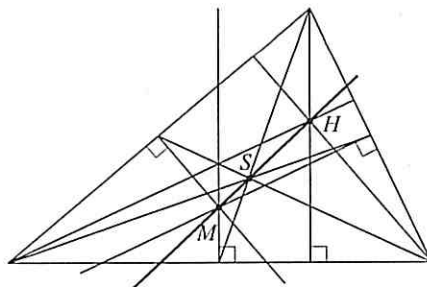
Dažnai tikro matematiko nepaliuma stebinti matematikos galimybės: kad matematika yra vienintelis mokslas, kur galima pateikti absoliučius ir visuotinius įrodymus (trumpam pamirškime Godelio problematiką), pavyzdžiui, kaip nuostabu ir keista, kad keliomis (baigtinėmis) eilutėmis įrodoma, jog visų (taigi be galo daug) trikampių vidaus kampų suma lygi 180 laipsnių. Lygiai 180 laipsnių, nei daugiau, nei mažiau, taigi tiek, kiek sudaro du statūs kampai. (Kodėl statūs kampai taip dažnai pasitaiko ir kodėl jie tokie svarbūs?) Kaip tik dėl to, kad neįmanoma apžvelgti visų (taigi be galo daug) trikampių, tai yra itin stebinantis dalykas.

Kitas pavyzdys: galima įrodyti, kad kiekvienas trikampis (figūra, sudaryta iš atkarpų) turi po vieną įbrėžtinį ir apibrėžtinį apskritimą (apvalią figūrą). Įrodymus nesunku suprasti, tačiau vis dėlto, kaip čia atsitinka, kad apskritimų ir trikampių tarpusavio ryšiui tarpininkauja pusiaukampinės ir statmenys, išvesti per kraštinių vidurio taškus? O gal kokiam nors labai keistai išstęstam trikampiui tai jau nebėra teisinga? Tačiau taip nėra, sąryšis teisingas ir tokiems trikampiams!

Nepaisant įrodymo, tai iki galo neįtikina net tikro matematiko, kažkur proto kertelėje slepiasi noras patikėti, kad toje trikampių begalybėje atsiras koks nors ypač keistas trikampis, neturintis įbrėžtinio ir apibrėžtinio apskritimų. Ir parodys matematikams, kas atsitinka, kai užlipi ant grėblio! Įrodymas, kad tokio trikampio nėra, neįtikina, netgi truputį nuvilia. Pavyzdžiui, nenuostabu, kad vis dar atsiranda gudročių, bandančių išspręsti skritulio kvadraturą problemą ir netikinčių seniai rastu įrodymu, kad to negalima padaryti. To sudėtingo paprastai suformuluoto teiginio įrodymo jie nesuprato, neturėjo galimybių suprasti. Kita vertus, pradėjus į šią problemą gilintis sprendimas atrodo visai arti, lengvai pasiekiamas kaip minėtas trikampių ir apskritimų ryšys.

Belieka stebėtis, kad tiesus ir apskritas gali taip nuostabiai tarpusavyje jungtis (pusiaukampinė — jų ryšio kūdikis?). Galėtum pamanyti, kad apskritimui ir trikampiui susijungti lėmė pats Dievas danguje.

Abstrakčiai samprotaudami, galime įrodyti (1 pav.), kad: a) visos trikampio pusiaukampinės susikerta viename taške W ; b) visi statmenys, išvesti per kraštinių vidurio taškus, susikerta viename taške M ; c) visos aukštinės susikerta viename taške H ; d) visos trys pusiaukraštinės susikerta viename taške S . Ir visa tai teisinga vienu metu ir ne kokiam nors specialiam, bet visiems be išimties trikampiams. O nuostabusia tai, kad bet kurio nelygiakraščio trikampio taškai M , H , S (išskyrus tašką W — šioks toks trūkumas!) yra vienoje tiesėje, o lygiakraščio — sutampa. Tai, žinoma, galima įrodyti, tačiau tas įrodymas nėra visiškai akivaizdus.



1 pav.

Grynasis vidinis matematikos grožis, nors ir nesuvokiamas žvilgsniu, gali atrodyti tarsi kitos, aukštesnės, net norisi sakyti — ezoterinės tvarkos atspindys. Ši „anapusinė“ būtis susideda vien tik iš matematinių elementų; gal ir efektinga galvoti apie ją kaip savaime gyvą ir protingą, tačiau prasmės tokiaame įsivaizdavime mažai.

Aš klausu savęs, ar matematikoje kartais neižvelgiama net moralinės tvarkos? Ar tai tik atsitiktinumas, kad japonų matematikas Shimura iš pradžių kalba apie gėrį, o po to, tarsi pabūgęs tokios svarstymų krypties, viską suveda į estetiką:

Aš atstovauju gėrio filosofijai. Matematikoje turi slypėti gėris. Pavyzdžiui, apie elipsines kreives galima sakyti, kad jos yra geros, jeigu parametrizuojamos modulinėmis formomis. [...] Galėčiau tarti, kad ši hipotezė kilo iš gėrio filosofijos. Dauguma matematikų plėtoja matematiką iš estetinių paskatų, ir iš jų ši gėrio filosofija atsiranda.

Tikriausiai moralė ir estetika nėra toli viena nuo kitos: pasak Getės, grožis, gėris ir tiesa yra tai, kas negriauna harmonijos (tačiau harmonija — tai ne kapų ramybė!), kas netarnauja mirčiai ir prievartai.

Aš beveik manyčiau, kad svarstant apie minėtą „taškų buvimą ant tiesės“ išryškėja protų skirtumai:

- nematematikas (arba tiksliau — mąstantis nematematiškai) pasakys: „Na, gerai, bet kas iš to?“. Jam tiesiog trūksta vidinio su pačia matematikos esme susijusio gebėjimo stebėtis ir jis visada klausia, kur tai pritaikoma (tikriausiai taip jis klausia ir apie meną);
- matematikas (tiksliau, intuityviai matematiškai mąstantis žmogus, net jeigu jis ir neturi jokio formalaus matematinio išsilavinimo) nepalaukia tuo stebėtis; formalus įrodymas tarsi papildo jo nuostabą, tačiau jos nesunaikina;
- riboto požiūrio matematikas taip pat seniai jau nustojo stebėtis; jo vaizduotė apsiriboja įrodymais: „Čia nebėra ko stebėtis, nes tai jau įrodyta.“

Tačiau grįžkime prie įrodymų. Matematika nėra tik menas, ji kartu yra ir ritualas. Kodėl sugalvota tiek daug Pitagoro teoremos įrodymų?

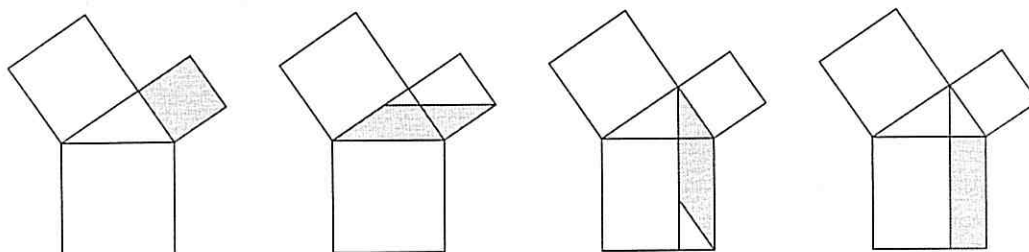
Pavyzdžiui, vienas iš jų remiasi 2 paveiksle pavaizduotais 4 brėžiniais, kuriuose užbrūkšniuotų sričių plotai yra lygūs. Iš to išplaukia Pitagoro teorema. Galima įsivaizduoti transformacijas, kurios vieną užbrūkšniuotą figūrą atvaizduoja į jai lygiaplotį kitą. Autoriaus tinklalapyje toks virsmas vaizdžiai parodytas.

Ir tikriausiai bus dar naujų, nors teorema jau seniausiai įrodyta. Tai visiškai paprasta — tikri matematikai iki šiol dar negali patikėti, kad tokia teorema iš tiesų yra teisinga.

Ši nuostaba atsiranda dėl to, kad tikras matematikas nėra abejingas ir aklas jį supančio pasaulio atžvilgiu, jis labai gerai supranta, kad tokia galutinio įrodymo galimybė yra absoliuti išimtis.

Kita priežastis, kodėl Pitagoro teorema vis įrodinėjama iš naujo, — ieškoma trumpesnių ir elegantiškesnių, taigi estetiškesnių įrodymų.

Pavyzdžiui, aš nepalaiduju gėrėtis įrodymu, kuriam panaudojami pjūviai ir posūkiai; šis įrodymas man atrodo toks harmoningas kaip bangos.



2 pav.

Apskritai tokios metaforos tinka ir visai matematikai: pavykęs, gražus įrodymas turi kažko, ką randame dramaturgijoje, jis teka tarsi simfonija (su visomis šalutinėmis temomis, t. y. pagalbiniais skaičiavimais) arba skamba tarsi sudėtingos struktūros eilėraštis, pulsuoja tarsi širdis, susitraukia ir išsiplečia, ir galų gale pasiekia laimingą pabaigą. Įprastinis *q.e.d.* (*quad erat demonstrandum*), dažnai kiek arogantiškai pridėdamas įrodymo pabaigoje tarsi sugėdinant tuos, kurie nesuprato įrodymo, gali būti suvokiamas ir taip: neįtikėtina, bet pavyko!

Pavyzdžiui, manęs nenustoja stebinti klasikinis įrodymas, kad skaičius $\sqrt{2}$ yra iracionalus. Iš pradžių tarsi tyčia daroma prielaida, kad $\sqrt{2}$ užrašomas nesuprastinama trupmena, o galų gale įrodoma, kad skaičius nėra racionalusis.

Apskritai, ar šis įrodymas prieštaros būdu nėra itin įžūlus ir išradingas matematikų būdas išsisukti iš nežinios? Jie negali įrodyti, kad kažkas yra teisinga, todėl įrodo, kad neteisinga tai, kas priešinga (čia nesvarstysime egzistavimo įrodymo problemos: jeigu Ervinas nėra juodaodis, tai nereiškia, kad jis baltaodis, jis gali būti indėnas arba šiaip kokia nors išgalvota būtybė).

Visa tai, aišku, yra tik žaidimas: tikras matematikas yra tiesiog žaidžiantis vaikas („...jeigu nebūsime lyg vaikai...“ Šv. R.) Žinoma, matematika yra niekas kita tik modelis, galima jį palyginti su žaisliniu geležinkelio modeliu. Čia „suaugęs vaikas“ gali žaisti pagal savo taisykles (grynai fiktyviai kaip mene!), jo niekas nevaržo (išskyrus logiką). Todėl aš nepalankiai žiūriu į dirbtinį matematikų rimtumą ir savo veiklos sureikšminimą (toks požiūris į matematiką ypač būdingas nematematikams): matematika nėra visų svarbiausias mokyklinis dalykas, jis iš tikrųjų laisvas taps tik tuomet, kai bus nustota į jį šitaip žvelgti.

Matematika taip pat yra viena iš meditacijos formų: beveik tas pats, ar spręsimė matematikos uždavinių ciklą, ar pasinersime į dzenbudizmą, ar kalbėsime rožančių.

Matematika dažnai tampa tokia įstabiai paprasta, kad tai staiga suvokęs patiri malonumą. Aš vis dar atsimenu akimirką, kai universitete supratau funkcijų teoriją: „Ak štai kaip čia yra: penkiasdešimt puslapių skirta įvesti holomorfinės funkcijos (tai bent magiškas žodis!) sąvoką, o likusieji trys šimtai puslapių yra tarsi šventė, kurioje su holomorfinėmis funkcijomis veikiama, kas tik įmanoma!“

Arba tas pilnosios indukcijos metodas, kurį taip sunku paaiškinti mokiniam. Tai juk taip paprasta: dega žalioji pirmojo šviesoforo akis; jeigu dega vieno šviesoforo žalioji akis, tai ir kito šviesoforo deganti akis taip pat žalia. Taigi tiesiog ritasi žalioji banga ir tiek.

Matematika yra paprasta, kartais prie tikslo veda labai paprastos mintys. Niutono ir Dekarto genialūs atradimai atsirado tikriausiai samprotaujant labai paprastai: „Tiesiogiai kreivių ir paviršių nemoku tyrinėti, esu tam per kvailas, taigi pabandyčiau juos tyrinėti naudodamasis tiesėmis (liestinėmis, stačiakampiais).“

Ir šis aplinkinis kelias iš tiesų atskleidė „kreivumo paslaptį“.

Tačiau visų gražiausia yra ta akimirka, kai pačiam pavyksta įrodymą sukurti. Kartais aš sakau savo mokiniams, kad nėra taip jau būtina išmanyti matematiką, apskritai nėra būtina išmanyti ką nors apibrėžto, visų pripažinto (pavyzdžiui, būti perskaičius Getę ar Bibliją); tačiau būtina turėti tokią sritį, kurioje pats galėtum ką nors nuveikti, patvirtinti savo jėgą (net ir netrokšdamas kitų žmonių pripažinimo). Savarankiškai sugalvotas matematinis įrodymas ir yra toks patvirtinimas, kad tu tai įstengei, vadinasi, gali daug nuveikti ir kitose srityse. Tad kelkis ir veik.

Tikroji matematika visada lieka atvira (visiška priešingybė tam, kas tarsi nuleidžiama iš dangaus). Matematikos žinių srautas neslūgsta. Naujieji matematiniai atradimai visada iš pradžių nėra taikomi, nes tik po kokių 50 metų atsiranda koks nors fizikas ir pasinaudoja matematine teorija.

Matematika tapo atvira ir kita prasme. Tiesiog puiku, kad vienpusiškumas, akiračio siaurumas matematikoje nebeturi pagrindo. Po to, kai Giodelis įrodė tam tikrą teorijose slypintį prieštarinumą, po tikimybių teorijos, chaoso teorijos, daugiareikšmės vadinamosios minkštos (angl. *fuzzy*) logikos atradimų, mąstyti remiantis vien dvireikšme tiesos-netiesos logika yra taip pat nerimta ir neprotinga, kaip būti fanatiškai religingu arba fanatišku ateistu (iš tiesų daugelis siauro akiračio matematikų ir ne matematikų atrodo tarsi kokios dvimatės būtybės).

Kaip jau minėjome, tam tikra prasme matematika yra susijusi su metafizika. Pavyzdžiui, Rymano geometrija buvo ta matematikos sritis, kuria pasinaudojęs Einšteinas praplėtė mūsų pasaulžiūrą. Kita vertus, tuo pat metu galima jausti (didieji fizikai taip visada ir jautė), kad visa tai yra tik teorija, kad „Dievas“ („daiktas savyje“) niekada nesileis sugaunamas; tačiau kartu galima manyti, kad šitai prie jo šiek tiek arčiau priartėta. Tai nėra tik arogantiška nuomonė, juk Biblijoje pasakyta, kad Dievas sukūrė žmogų pagal savo pavidalą.

Tokia matematika nėra vaizdi, taigi ji yra mūsų abstrakčios, ne jutimais pagrįstos kultūros dalis. Tačiau kartais atsitinka kažkas netikėto:

- peržengiamos tarsi nulemtos savų galimybių ir jutiminio pažinimo ribos;
- atsiranda nuostaba dėl žmonių galimybės mąstyti apie supantį pasaulį;
- atsiranda nuostaba, kad žmogus gali tyrinėti (iš dalies) ir paaiškinti visatą, kad jis lieka pasaulio centru (kaip Kopernikas sakė: „Nenorėčiau, kad kartu su Žeme ir žmogus nebebūtų visatos centras; priešingai — kaip tik dėl pažinimo galių jis ir turi ten likti“); ši nuostaba nėra antropocentrinės arogancijos išraiška; jos šaltinis ir išdava yra dėkingumas;
- atsiranda nuostaba, kad taip sudėtingai, tačiau kartu ir labai paprastai priartėta prie „Dievo“; tai skatina ne tik dar labiau stebėtis visa kūrinija, bet ir dar labiau ją gerbti;
- atsiranda nuostaba, kad matematika apskritai yra pritaikoma; kad kūnams, krintantiems žemyn, patinka paklusti matematikos dėsniai $s = (1/2)gt^2$; o gal mes nusižiūrėjome matematiką iš gamtos?
- atsiranda nuostaba dėl atsiveriančių neįžvelgiamų teorinių-filosofinių bedugnių: ar mes, žmonės, kartais gamtai neprimetame savo sistemos (atrodo, evoliucija mus išmokė visur matyti pavyzdį, kitaip nebūtume įgiję tvarkos jausmo); jeigu taip, tai mes iš tikrųjų esame jos šeimininkai;

- atsiranda nuostaba dėl vidinio matematikos automatizmo (pavyzdžiui, Einšteinas iš pradžių matematiškai gavo išvadą, kad pasaulis plečiasi, tačiau nenorėjo tuo patikėti, todėl plėtimuisi kompensuoti pats įvedė tam tikrą konstantą).

Nuostaba, kurią tiek kartų paminėjau, man atrodo labai svarbi, kone mūsų kultūros išgelbėjimas. Kaip puiku, kad fizikai dar negali paaiškinti elektros lauko (metafora!) ir kaip jis iš tikrųjų atsiranda. Matyt, kada nors tai bus paaiškinta, tačiau ir tada liks paslapčių arba atsiras visiškai naujų. Pavyzdžiui, iki šiol mažiausiomis laikytos elementariosios dalelės — kvarkai, atrodo, taip pat gali būti skaidžios!

Mane ypač džiugina — dabar aš kalbu tarsi koks pranašas — kad, nepasant kai kurių arogantiškų fizikų ir tuščiakalbių filosofų pažadų, „didžioji suvienijimo teorija“ tikrai nebus sukurta.

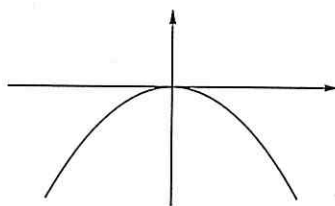
Kaip būtų nuobodu, jeigu mūsų pažinimas kada nors užsibaigtų (kaip tik matematikai, pavyzdžiui, Chaitin, ir įrodė, kad to niekada nebus). Tačiau tai nereiškia, kad vėl ir vėl bus bandoma siekti galutinio ir išsamaus žinojimo, jau vien dėl to, kad nežinomybė yra gąsdinanti.

Matematika yra menas dar viena, kur kas akivaizdesne, netgi jutimu pagrįsta prasme. Pavyzdžiui, žmonėms labai patinka rutuliai, juos galime pamatyti kone kiekvienoje suvenyrų lentynoje, kaip „meno architektūros“ elementas jie dako mūsų miestus. Galima matematiškai įrodyti, kad jie iš tikrųjų ypač gražūs — pasitelkus analizę (genialią Niutono ir Leibnico išeitį iš itin painios padėties) galima įrodyti, kad iš visų tam tikro tūrio kūnų rutulys turi mažiausią paviršiaus plotą. Taigi taupumo sumetimais galėtume nuspręsti, kad pieną pardavinėti geriausia rutulio formos pakuotėse (kitas klausimas — kaip tai padaryti; be to, tokios pakuotės riedėtų iš šaldytuvo ir atsirastų pakuočių sandėliavimo problema). Verta paminėti, kad paprastai formuluojamas uždavinys apie rutulių sandėliavimą, kad jie užimtų mažiausiai vietos, matematiškai nėra išspręstas, nors nagrinėjamas nuo Keplerio laikų.

Tiesiog norisi pasakyti: kaip gerai, kad rutulys yra ne tik estetiškai patrauklus, bet tą jo patrauklumą galima matematiškai, jeigu ne pagrįsti, tai bent pabrėžti.

Pavyzdžiui, kodėl tiltų ramsčiai dažnai daromi tiksliai hiperbolės formos (3 pav.)? Juk ne vien dėl to, kad tai labai naudinga statikos požiūriu: hiperbolė turi savybę, kad svorių išdėstytų pagal hiperbolę, slėgimas susiveda į pagrindą (tai galima įrodyti), todėl konstrukcija nesugrius (nebent dėl medžiagos nevienalytiškumo ar blogo pamato). Hiperbolė pasirenkama ir todėl, kad jos lankas ypač gražiai atrodo.

Ar mes laikome gražiu tai, kas yra matematiškai teisinga?

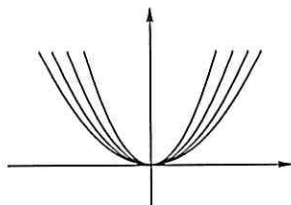


3 pav.

Kas atsirado pirma: višta ar kiaušinis? Matematinė aukso pjūvio formulė, ar pastatytos naudojantis aukso pjūviu graikų šventyklos, kurios buvo laikomos gražiomis (ir tas grožis buvo matematiškai suvoktas ir išreikštas)?

Kitas estetikos pavyzdys — funkcijų šeimų grafikai, ypač kai jie nubrėžti vienas greta kito, tarsi parodant, kaip jie susiglaudžia ir išsiplečia (4 pav.).

Ar tai neprimena lėtai besiskleidžiančios gėlės ypač, kai grafikams brėžti panaudojama animacija? Žinoma, gėlė kur kas daugiau — ji gyva, ji kvepia.



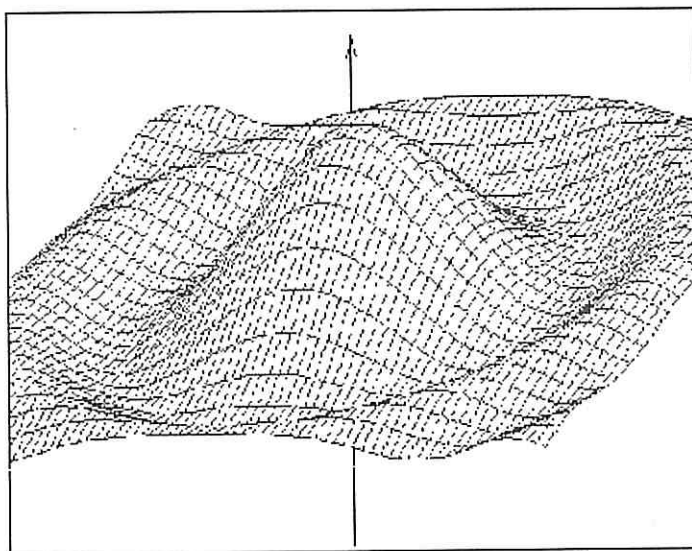
4 pav.

Bent jau man, geriausiai įpratusiam naudotis optiniais-erdviniais įvaizdžiais, suvokiančiam žinias kaip istorijas, matematika, kur tik įmanoma, turi judėti. Man atrodo, kai nurodoma tik pradinė ir galutinė padėtys, nuo tokių kaip aš nuslepiama suvokimo galimybė.

Dažnai galima sakyti, kad yra ne tik matematikos estetika, bet ir estetikos matematika: pakanka tik prisiminti, kaip dažnai renesanso menininkai naudojos matematika. Pavyzdžiui, vaizduojant perspektyvą (tolių perspektyvoje juk taip pat yra estetikos elementų). Tai buvo naudojama ne tik seniau; ir dabar kone kas antrame filme veikiantys asmenys hierarchiškai išdėstomi pagal vaizdo įstrižaines, veiksmo dramatismas pabrėžiamas naudojantis matematiškai sukonstruotu optiniu dramatismu.

Daugelis atradimų, pavyzdžiui, Galilėjaus ar Koperniko, nebuvo sąlygoti eksperimentiškai (vien tik apytiksliai įmanomi atlikti eksperimentai netgi prieštaravo jų atradimams). Tų atradimų priežastis matematinė-estetinė: iš pradžių taip atrodė gražiau ir tik po ilgo laikotarpio eksperimentai patvirtino naujuosius matematinius paaiškinimus. Todėl manęs neapleidžia nuojauta, kad mes ir šiandien daug ką laikome teisingu tik todėl, kad negalime atsispirti matematiniam-estetiniam poveikiui.

Muzikinės gamos garsų stygų ilgių santykiai atitinkamai lygūs $1/2$, $1/3$, $1/4$ ir t. t. (todėl pitagoriečiai padarė išvadą, kad sveikieji skaičiai ir trupmenos yra konstruktyvieji visatos elementai, taigi Dievas galvojo skaičiais ir trupmenomis). O kas yra natos? Ar ne melodijos vaizdavimas funkcijos grafiku (tai, žinoma, nereiškia, kad šis vaizdavimas ir yra muzika, ar gali ją pakeisti). Duetą beveik galima aprašyti trimačiu funkcijų landšaftu (5 pav).



5 pav.

Daugelio eilėraščių poveikis paremtas jų optine-geometrine simetrija, t. y. nuolatinio sugrįžimo pažadu, pokyčių ir pastovumo derme:

*Ir
vėl
žiūriu,

ir
vėl
mąstau,

ir
vėl
klausimus
statau.

Kas
išsisprendė
su
vakar –
diena,

pasikartoja
vėl
su
aušra.*



Jonas Mekas, *Poezija*, Vilnius, 1971, p. 147. Parinko V. St.

O kas yra Jing ir Jang (neminint šiam ženklui suteikiamos ezoterinės prasmės), jeigu ne tobula ir harmoninga geometrija ir kartu simbolis, reiškiantis priešingybių ryšį ir dermę (nuo antikos laikų viena iš matematikos pagrindinių temų — tiesaus ir apvalaus ryšys, tik prisiminkime skritulio kvadratūros uždavinį).

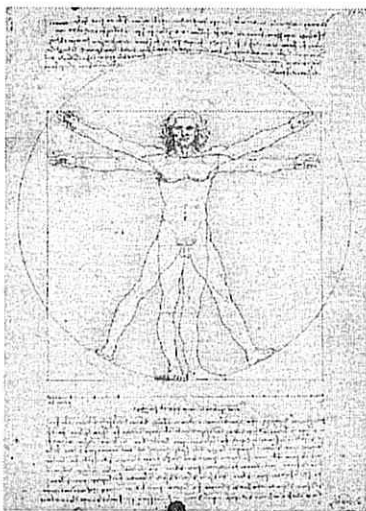
Mes visi esame (kaip tik estetinė prasme) matematikai. Tikriausiai ne todėl, kad tokia mūsų prigimtis, bet kad esame taip kultūros sąlygoti.

Iš dalies tai mus net skaudina, nes ši geometrinė estetika tapo tarsi kalėjimu: tik pažvelkime ir mūsų kasdienybėje pastebėsime stačiųjų kampų diktatūrą (ir apskritai šiuolaikiško interjero šaltumą). Maža to, pramonės pagaminti daiktai yra tokie idealiai lygūs, kad net atrodo, jog jie sutampa su Platono idėjomis (pavyzdžiui, tobulo apskritimo idėja). Mintis, kad už „negrynų“ daiktų slypi tobulos idėjos, galėjo kilti tik tam, kas dar nežinojo tobulų daiktų.

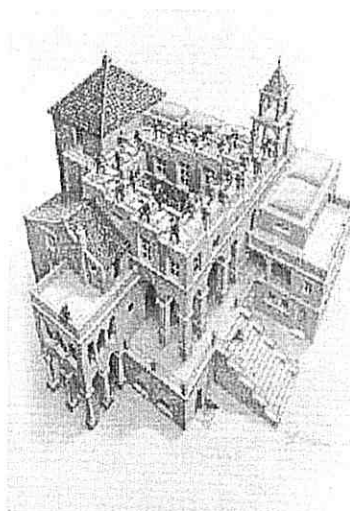
Daiktų tobulumas mus tarsi gėdina, parodo, kokie esame netobuli (mes desperatiškai bandome prisitaikyti prie daiktų). Man net atrodo, kad jie sukurti mus menkinti: Frankfurto bankų pastatai demonstruoja kone gryną fašistuojančią valdžios aroganciją ir norą parodyti žmonėms jų menkumą.

Kita vertus, tuo pat metu galima išsaugoti nuostabą dėl geometrinio daiktų tobulumo. Tai visiškai nėra savaime suprantama, kad kainuojanti grašius dirbtinio stiklo dėžutė turi būti tokia puiki ir įstabiai tobula (antikos laikais ji galbūt būtų paskelbta aštuntuoju pasaulio stebuklu!). Daiktai tapo dieviškais: pavyzdžiui, Rolandas Barthesas, nelaiko sutapimu, kad ypač pasisekęs Citroeno modelis vadinosi Citroen DS: DS = DeeSee = deivė (pranc.).

Visa matematika yra žmogiška jau vien todėl, kad ją sukūrė žmonės. Tačiau matematika gali priartėti prie žmogaus ir gamtos dar arčiau: tiek įprastinės Euklido geometrijos figūromis (6 pav.), tiek naujosios fraktalų geometrijos, kuri turėtų pakeisti tiesių geometriją, aprašančią tik vieną procentą realybės, dariniais. Fraktalai atrodo įspūdingai, tačiau tai nėra joks menas, už jų slypi tik sudėtingos matematinės struktūros.



6 pav.



7 pav.

Matematinis Esherio menas (7 pav.) taip pat nėra joks menas: pašalinus optinius efektus ir matematinės konstrukcijos, beveik nieko neliktų.

Tačiau matematikoje yra ir tokių dalykų, kurie, mano požiūriu, nėra estetiški. Vieną tokį atvejį noriu panagrinėti pradėdamas nuo Pitagoro teoremos: $a^2 + b^2 = c^2$.

Kitaip tariant, stačiojo trikampio statinių ilgių kvadratų suma lygi įstrižinės ilgio kvadratui. Pati savybė yra įspūdinga. Manęs nenuvilia, kad ji teisinga tik statiesiems trikampiams (juk tokių yra be galo daug). Maža to, man atrodo, kad šitaip stačiųjų trikampių šeima yra netgi pagerbiama ir statusis trikampis nuostabiai išskiriamas iš visų kitų trikampių.

Nuostabu ir tai, kad Pitagoro teoremos lygybė teisinga paprastiems natūraliesiems skaičiams: $3^2 + 4^2 = 5^2$. Tokią lygybę tenkina be galo daug natūraliųjų skaičių trejetų, pavyzdžiui, skaičių 3, 4, 5 kartotiniai ($2 \cdot 3 = 6$, $2 \cdot 4 = 8$, $2 \cdot 5 = 10$ ir t. t.; geometriškai tai tolygu padidinti tam tikrą trikampį).

Man atrodo svarbu, kad Pitagoro teorema ne tik paprastai formuluojama, bet ir gana lengvai įrodoma, be to, tie įrodymai yra labai elegantiški ir vaizdūs.

Tačiau matematikai nuolat trokšta iš esmės apibendrinti. Jie kelia klausimą, ar Pitagoro dėsnio negalima apibendrinti aukštesniems laipsniams, pavyzdžiui, $a^3 + b^3 = c^3$, $a^4 + b^4 = c^4$ ir apskritai $a^n + b^n = c^n$ (čia n — ne mažesnis už 2 natūralusis skaičius). Analogiškas Pitagoro teoremai klausimas yra toks: ar yra sveikųjų skaičių a , b , c , kuriems užrašytoji lygybė su aukštesniais laipsniais teisinga.

Nematematikas tikriausiai galvotų: „Kodėl turėtų būti įmanoma šią lygybę apibendrinti?“ O matematikas — kaip tik priešingai: jeigu lygybė teisinga skaičiams, kurių laipsnio rodiklis lygus 2, tai turėtų būti galima ją ir apibendrinti. Jo nebedomina atskiri atvejai (ir tai, kaip lygybę $a^n + b^n = c^n$ būtų įmanoma pavaizduoti ar pritaikyti).

Galima pridurti, kad bent jau lygtį $a^3 + b^3 = c^3$ galima geometriškai pavaizduoti; toks vaizdavimas leidžia tikėtis, kad sprendinys sveikaisiais skaičiais gali egzistuoti.

Geometrinis lygties $a^2 + b^2 = c^2$ vaizdavimas remiasi dvimatėmis figūromis (kvadratais), lygties $a^3 + b^3 = c^3$ – trimatėmis figūromis (kubais), lygčiai $a^4 + b^4 = c^4$ pavaizduoti prisireikia jau keturmačių figūrų. Ketvirtasis matavimas žmonėms jau yra sunkiai suvokiamas (jį galime tapatinti su laiku, kai mus domina ne tik *kur* tai vyksta, bet ir *kada*; tačiau keturmatį kubą kažin ar įsivaizduojame). Ketvirtojo matavimo dar prisireikia reliatyvumo teorijoje, tačiau dar didesnius matavimus jau visiškai sunku įsivaizduoti. Gali būti (kaip kažkur skaičiau), kad Visata aprašoma ne keturiais (kaip tvirtina reliatyvumo teorija), bet net dvylika matavimų. Jeigu jau taip, tai tryliktasis matavimas yra visiška abstrakcija, o trylikamatis „kubas“ pranoksta net didžiausio matematiko vaizduotės galimybes.

Tačiau ir tai nagrinėti yra prasminga: nors šių aukštesnių matavimų negalima pavaizduoti, su jais galima paprastai skaičiuoti (iš tiesų tai per daug paprasta, kad būtų tiesa: pakanka trimatės erdvės skaičiavimų taisyklės perkelti į aukštesnių matavimų erdves ir skaičiuoti lygiai taip pat). Kita vertus, yra ir taikymų, pavyzdžiui, kai produktui aprašyti prisireikia daugelio parametrų: dydžių (pirmieji trys matavimai), pagaminimo datos (ketvirtasis matavimas – laikas), kokybės (penktasis matavimas), spalvos (šeštasis matavimas), medžiagos (septintasis matavimas) ir kt.

Ar lygtis $a^n + b^n = c^n$ turi sprendinių sveikaisiais skaičiais a, b, c , tapo vienu svarbiausių visos matematikos klausimų.

Tai atsitiko dėl dviejų priežasčių:

1. Kad ir kiek bandyta, tokio sprendinio rasti nepavyko. Tačiau tokios nesėkmės matematikui nieko nereiškia. Dar kartą pabandžius, galbūt toks sprendinys atsiras. Mat, kai atsiranda nuojauta, kad to niekada neatsitiks, matematikas ieško bendro įrodymo. Pavyzdžiui, Euleris buvo suformulavęs teiginį, kad lygtis $a^4 + b^4 + c^4 = d^4$ neturi sprendinių sveikaisiais skaičiais. Po šimtmečius trukusių ieškojimų pasinaudojus kompiuteriais buvo rastas iš didžiulių skaičių sudarytas sprendinys

$$2\,682\,440^4 + 15\,365\,639^4 + 18\,796\,760^4 = 20\,615\,673^4$$

ir įsitikinta, kad yra be galo daug tokių sprendinių sveikaisiais skaičiais. Žmogus šiuo požiūriu yra kiek juokingas: suradęs vieną sprendinį, jis tuoj pat spėja, kad jų yra daug, netgi be galo daug.

Tipiška situacija matematikoje, kai vienintelis rastas kontrapavyzdys sugriauna visą teoriją, kad sprendinių sveikaisiais skaičiais nėra.

2. Kadangi lygtis $a^n + b^n = c^n$ atrodo labai paprastai, kyla mintis (kurią teigia ir Pitagoro teoremos įrodymas), kad ir įrodymas turėtų būti paprastas.

Tikras matematikos istorijos kuriozas yra tai, kad dar prieš 400 metų matematikas Fermat tvirtino, kad:

- 1) lygtis neturi sprendinių sveikaisiais skaičiais;
- 2) rado šio teiginio įrodymą, tačiau knygos paraštės buvo per siauros tą įrodymą užrašyti.

Ar Fermat tikrai žinojo įrodymą, ar mulkino pasaulį? Fermat buvo genialus žmogus, iš jo galima visko tikėtis, netgi įrodymo.

Ištisos matematikų kartos bandė įrodyti, kad lygtis $a^n + b^n = c^n$, kai $n > 2$, neturi sprendinių sveikaisiais skaičiais. Netgi didžiausiems genijams nepavyko to įrodyti. Ir tik prieš kelerius metus matematikas Andrew Wilesas sugebėjo sukurti įrodymą.

Visa tai aš papasakojau tam, kad galėčiau pridurti, jog šios problemos, susijusios su paprasta lygtimi, įrodymas užima daugiau kaip 100 puslapių, o jame panaudojama sudėtingiausia pastarųjų šimtmečių matematika.

Gali būti, kad yra kur kas paprastesnis, dar nežinomas įrodymas, o Wilesas įrodinėdamas vaikščiojo aplinkeliais. Tačiau kaip ir kiti žymūs matematikai jis spėja, kad paprasto įrodymo, deja, neegzistuoja.

Nors ir jausdamas didžiulę pagarbą Wilesui, jo įrodymą laikau neestetišku (nors ir kokie elegantiški būtų jo argumentai ir modernios matematikos taikymai). Savo nuomonę aš grindžiu trimis argumentais:

1. Taip paprastai suformuluoto teiginio įrodymas yra nepaprastai ilgas (ar tikrai toks turėjo būti?).

2. Aš, kuklus matematikos mokytojas, neturiu jokios galimybės šio įrodymo suprasti. Galiu tik pasitikėti „didelių“ matematikų nuomone.

Su tais įrodymais yra štai kokia problema: žinoma, įrodymas yra ne tik tada teisingas, kai jį gali suprasti visi. Pavyzdžiui, iki šiol aršiai ginčijamasi, ar keturių spalvų teoremos (kad kiekvienam žemėlapiui nuspalvinti pakanka keturių spalvų) įrodymas apskritai yra įrodymas, nes didelę jo dalį atliko kompiuteris, todėl joks žmogus, net ir geriausias matematikas įrodymo nepatikrins.

3. Fermat teoremos įrodyme naudojamosi kompleksiniai skaičiai, apie kuriuos lygtyje $a^n + b^n = c^n$ nėra jokios kalbos. Kaip tie kompleksiniai skaičiai įrodyme atsiranda — mįslingas ir iki galo nėra gerai suvokiamas dalykas. Kita vertus, iš geometrijos aš žinau, kad uždavinius kartais pavyksta išspręsti nubrėžus pagalbines linijas, kurių pradinėje uždavinio sąlygoje taip pat nėra (pavyzdžiui, nestatusis trikampis, nubrėžus aukštinę, dalijamas į du stačiuosius).

Matematikos estetika yra ir didžiausias, koks tik įmanoma, paprastumas.

Estetinis nepasitenkinimas, kylantis dėl ilgų ir sudėtingų įrodymų, yra ne tik mano problema, tačiau ir visos matematikų bendruomenės. Net ir seniai įrodytus matematikos teiginius vis bandoma įrodinėti iš naujo ieškant kitų elegantiškesnių įrodymų. Vos tik paskelbus Fermat teoremos įrodymą, Gerdas Faltingsas jau pasiūlė vieną jo dalį suprastinti.

Didžiausią matematikos estetiką tikras matematikas randa ne išoriniame grožyje (pavyzdžiui, grafikų dailume), bet vidinėje elegancijoje:

- viena vertus, kiek galima paprastesniuose, vaizdesniuose ir netikėtuose įrodymuose;
- kitą vertus, matematikos estetinėje struktūroje (pavyzdžiui, ryšiuose tarp atskirų matematikos krypčių).