$\alpha + \omega$, 2002, Nr. 2, 98–99

π pasirinkimas — klaida!

Bob Palais
palais@math.utah.edu

*Žurnale „The Mathematical Intelligencer", **23**(3), 2001, 7–8 išspausdintas Bob Palais straipsnis „π Is Wrong!", kurį išvertė Rimas Norvaišas.*

Suprantu — tai bus pavadinta šventvagyste, bet aš manau, kad skaičiaus π pasirinkimas yra klaida. Per amžius π buvo be galo liaupsinamas; matematikai patetiškai kalbėjo apie jo mįslingumą, naudojo jį kaip matematikų draugijų simbolį ir apskritai — kaip matematiką simbolizuojantį ženklą, įdiegė jį į skaičiuoklius ir į programavimo kalbas. Netgi filmas buvo pavadintas jo vardu[1]. Aš neabejoju jo iracionalumu, transcendentalumu ar skaitiniais įverčiais, bet aš abejoju, ar būtent šį skaičių reikėjo taip sureikšminti. Tikrasis skaičius, kuris nusipelnė visos tos pagarbos, suteiktos dabartiniam apsimetėliui, yra skaičius 2π.

Vis dėlto aš nemanau, kad π gali ar netgi turėtų būti keičiamas (nors jau gavau keletą gerų pasiūlymų!). Tačiau verta nustatyti šio skaičiaus pasirinkimo padarinius kaip įspėjimą ir kaip pamoką pasirenkant tinkamus žymėjimus matematinėms idėjoms perteikti. Šią problemą aš palyginčiau su tuo, kas būtų įvykę, jei vietoje eksponentinio augimo daugiklio 2,718... Leonhardas Euleris simboliu e būtų pažymėjęs eksponentinio gęsimo daugiklį 0,3678... (lygų $\frac{1}{2,718...}$). Tuo atveju formulėse turėtume daugybę minusų, panašiai kaip dabar turime daugybę skaičiaus $\pi = 3,14...$ daugiklių 2.

Labiausiai π apibrėžimas aktualus tiems, kurie tik pradeda mokytis geometrijos ir trigonometrijos ir kuriems sakoma, kad matuoti kampą radianais yra natūraliau negu laipsniais. Tam tikra prasme taip yra, nes skritulio ketvirčiui yra natūraliau priskirti skaičių 1,57... negu 90. Deja, ši graži idėja negali būti įgyvendinta, nes π nėra 6,28.... Jeigu taip būtų, tai ketvirtadalis arba kvadrantas būtų lygus ketvirtadaliui π radianų, skritulio trečdalis — trečdaliui π radianų ir t. t. Puiki galimybė sužavėti moksleivį šiuo gražiu ir natūraliu supaprastinimu yra sužlugdyta.

Panašų vaizdą gautume, jei įprastiniame laikrodyje valanda laikytume 30 minučių. Tuo atveju 15 minučių, arba ketvirtadalis ilgosios laikrodžio rodyklės poslinkio, būtų vadinama puse valandos, kaip matematikoje ketvirtadalis skritulio yra pusė π! Netgi geriausios kompiuterinės matematikos programos ketvirtį skritulio atitinkančiam posūkiui žymėti naudoja 90°. Iš tikrųjų nieko negalima kaltinti, nes π pasirinkimas yra klaida.

Tačiau matematikui svarbesnis argumentas yra daugybė tų svarbių teoremų ir formulių, į kurias nelemtasis daugiklis 2 įsiskverbė ir paplito: Cauchy integralinė formulė ir Fourier eilučių formulės visos prasideda daugikliu $\frac{1}{2\pi}$, ir Stirlingo faktorialo aproksimacija ir Gausso normalusis skirstinys taip pat jį turi, Gausso-Bonnet ir Picard teoremos pažymėtos 2π ženklu. (Archimedas parodė, kad vienetinio rutulio paviršiaus plotas yra lygus vienetinių spindulio ir aukščio cilindro paviršiaus plotui, arba dvigubam vienetinio apskritimo ilgiui: $4\pi = 2(2\pi)$.) Dauginimo iš 2 amaras užpuolė net fiziką, pavyzdžiui, Maxwello lygtyse (Gausso dėsnis, Ampère'o dėsnis, Coulono konstanta) ir Plancko konstanta $\frac{h}{2\pi}$. Eulerio formulė turėtų būti lygybė

[1] Apie filmą žr. http://www.pithemovie.com/pithemovie.html ir http://www.ram.org/ramblings/movies/pi.html (vertėjo pastaba). Kaip meniniam filmui matematinis kontekstas labai aukšto lygio, išskyrus vieną išsprūdusį klausimą: „Aišku jūs išbandėte visus skaičius, sudarytus iš 216 skaitmenų?" Sugaištant vieną nanosekundę vienam skaičiui, sudarytam tik iš 30 skaitmenų, tam prireiktų daugiau laiko nei visas Visatos amžius.

$e^{i\pi} = 1$ (arba lygybė $e^{i\pi/2} = -1$, t. y. viena fundamentalia konstanta 2 daugiau negu anksčiau). Ar nebūtų gražu, jei fundamentaliųjų trigonometrinių funkcijų cos ir sin periodas būtų π o ne 2π? Ar nebūtų gražu, jei pusplokštumės integralas, pavyzdžiui, Hilberto transformacija, būtų toks, kad prieš jį atsirastų daugiklis 2 o ne atvirkščiai — dingtų.

Trikampio vidaus kampų suma yra π, pripažinkime. Tačiau 2π yra bet kurio daugiakampio išorės kampų suma, iš kurios lengvai išplaukia vidaus kampų suma, ir kurios apibendrinimas paprastai uždarai kreivei yra kreivumo integralas. Skritulio ploto formulė būtų $\frac{1}{2}\pi r^2$, taigi būtų panaši į formules $\frac{1}{2}gt^2$ ar $\frac{1}{2}mv^2$; ji tiktų diegiant tam tikrą įprotį reikšti kvadratinius dydžius ir atspindėtų skritulio ploto sąryšį su perimetro integralu (spindulio atžvilgiu) geriau nei formulė πr^2. Kitaip sakant, spindulys yra gerokai labiau naudotinas nei diametras — tiesiog prisiminkime, ką reiškia vienetinis skritulys. Jei taip nebūtų, aš sutikčiau, kad tradicinis π pasirinkimas yra teisingas.

Jei π reikštų $\frac{C}{r}$, tai rašytume:

$$\sin(x+\pi) = \sin(x),$$

$$n! \approx \sqrt{\pi n}\, n^n e^{-n},$$

$$\hbar = \frac{h}{\pi},$$

$$90^\circ = \frac{1}{4}\pi \text{ radianų — kvadrantas},$$

$$f(a) = \frac{1}{\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz,$$

$$e^{i\pi} = 1,$$

$$S_{\text{skr}} = \frac{1}{2}\pi r^2,$$

$$T = \frac{\pi}{\omega},$$

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)e^{inx}\,dx,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = 1.$$

Vieneto n-osios šaknys: $e^{\frac{j\pi i}{n}}$, $j = 0, \dots, n-1$.

Autoriaus tėvas, manydamas, kad reikšmės $\pi = 6{,}28\ldots$ naudojimas formulėse sukeltų tik nesusipratimą, pasiūlė naują simbolį — junginį dviejų pi simbolių, turinčių bendrą „koją“ (panašiai kaip trijų kojų lenktynėse).

Be abejo, sakysite, jog visa tai iš tikro nekeičia matematikos, kadangi bet ką galima apibrėžti taip, kaip patinka; ir tai yra teisinga. Tačiau jau minėta analogija su skaičiumi e arba idėja apibrėžti menamą vienetą kaip $\frac{\sqrt{-1}}{2}$ rodo tikrąsias π keistenybes. Nė viena iš šių idėjų nepakeistų matematikos, bet niekas ir neneigtų, kad jie yra absurdiški.

Tačiau iš tikro mane jaudina tai, kad norėdami pademonstruoti savo „intelektą“ į kosmosą visų pirma siuntėme 3,14.... Aš nesu tikras dėl to, ką kitos gyvybės formos, gavusios šį pranešimą, darys po to, kai nustos juoktis iš būtybių, nepasižyminčių ortodoksalumo kritiškumu. Kadangi pranešimas perduotas dvejetaine forma, galime tikėtis, kad postūmis per vieną bitą liks nepastebėtas!

Aš nenustebčiau sužinojęs, kad ši idėja jau buvo diskutuojama anksčiau. Bet man nepavyko rasti jokios nuorodos nei nuostabiojoje Lennarto Berggreno, Jonathano Borweino ir Peterio Borweino knygoje *Pi: A Source Book*, nei Petro Beckmanno *A History of Pi*, nei pagaliau internete. Kai aš kam nors užsimindavau, jog π turi trūkumų, reakcija kito nuo nuostabos ir juoko iki tvirtinimo „Žinoma, aš visą tai žinojau“ ar iki neigimo, ar netgi iki pasipiktinimo.

Prisiminkime istoriją[2] (aš buvau nustebintas kaip ir kiekvienas, kam pasakiau, kad senovės Graikai π simbolio nenaudojo): apskritimo perimetro ir jo skersmens santykiui žymėti (1647) Oughtredas naudojo simbolį π/δ. Davidas Gregory (1697) naudojo π/ρ apskritimo perimetro ir jo spindulio santykiui žymėti. Pirmasis, panaudojęs π ta prasme, kuria jis suprantamas šiandien, buvo matematikas William Jones, 1706 m. teigęs, kad $3{,}14159\ldots = \pi$. Visuotinai naujoji π reikšmė buvo pripažinta po to, kai šį simbolį 1737 m. pradėjo naudoti Euleris, iki tol tam tikslui naudojęs raides p ir c. Jei jis arba Jones, vienetą būtų priskyręs Gregory'io ρ vietoje Oughtredo δ, tai šiandien mūsų formulės atrodytų nepalyginamai elegantiškiau ir aiškiau.

[2] L. Berggren, J. Borwein, and P. Borwein, *Pi: A Source Book*, Springer, New York 2000, p. 292.