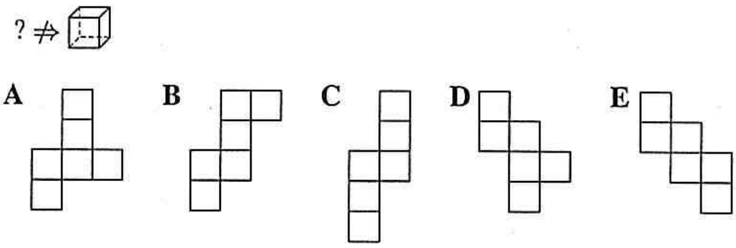
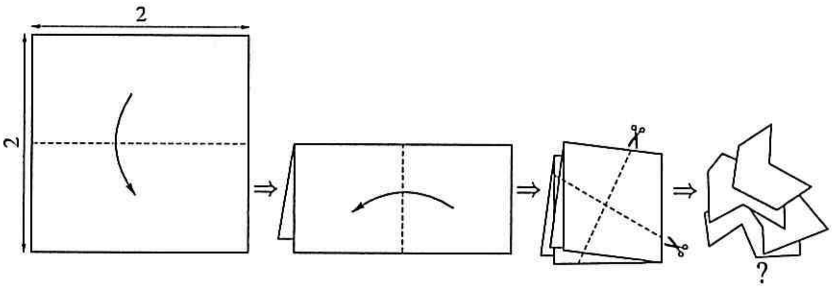
$\alpha + \omega$, 2002, Nr. 2, 72–77

Europos „Kengūros“ komandinėje olimpiadoje uždavinių sąlygose nėra teksto. Spausdiname dalį tokių užduočių, kurios buvo pateiktos šiais metais Rumunijoje vykusiame konkurse.

ε. 113



ε. 114



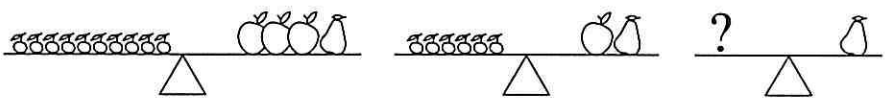
A 4 **B** 6 **C** 9 **D** 8 **E** 7

ε. 115

$$\underbrace{(\ldots((}_{2002}1\cdot 2+3-4)\cdot 2+3-4)\ldots)\cdot 2+3-4=?$$

A 2002 **B** 0 **C** 1 **D** 257123981 **E** 4003

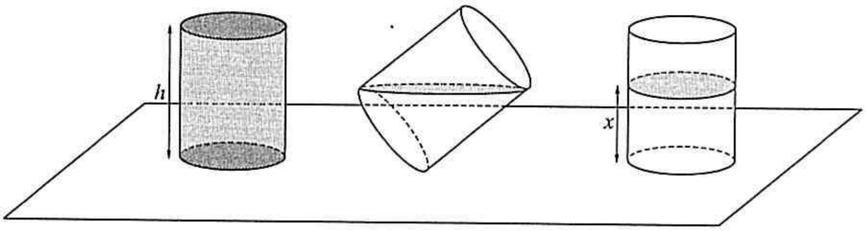
ε. 116



$b = ?$

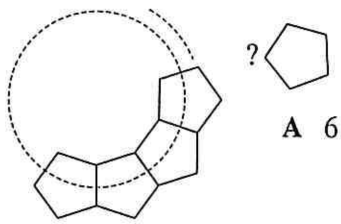
A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4 **E** 5

α. 274
◊◊◊

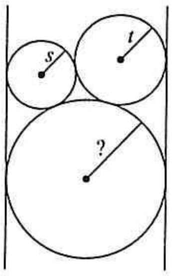


A $x = \frac{h}{2}$ **B** $x = \frac{h}{3}$ **C** $x = \frac{h}{4}$ **D** $x = \frac{2h}{3}$ **E** $x = \frac{3h}{4}$

α. 275
◊◊◊



A 6 **B** 7 **C** 8 **D** 9 **E** 11

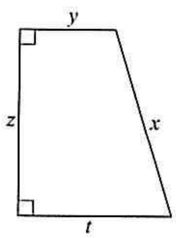


α. 276
◊◊◊

A $2\sqrt{s^2+t^2}$ **B** $s+t$ **C** $2\sqrt{st}$ **D** $\frac{4st}{s+t}$ **E** $(s+t)^2$

α. 277
◊◊◊

A $2000^{2002} < 2001^{2001} < 2002^{2000}$
B $2001^{2001} < 2000^{2002} < 2002^{2000}$
C $2001^{2001} < 2002^{2000} < 2000^{2002}$
D $2000^{2002} < 2002^{2000} < 2001^{2001}$
E $2002^{2000} < 2001^{2001} < 2000^{2002}$

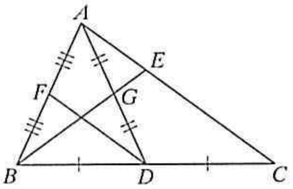


α. 278
◊◊◊

$x, y, z, t \in N$,
$x + y + z + t = 16$,
$y = ?$

A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4 **E** 5

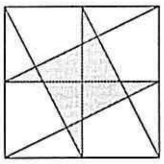
$\alpha.$ 279



$\frac{S_{ABG}}{S_{BDF}} = ?$

A $\frac{1}{4}$ **B** 1 **C** $\frac{1}{16}$ **D** $\frac{1}{2}$ **E** $\frac{1}{3}$

$\alpha.$ 280



$\frac{S_{\diamond}}{S_{\square}} = ?$

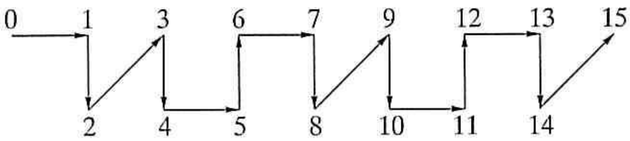
A $\frac{8\pi-\sqrt{2}}{2}$ **B** $\frac{16\pi-2\sqrt{3}}{4}$ **C** $\frac{24\sqrt{3}-8\pi}{3}$ **D** $\frac{16\pi-16\sqrt{3}}{3}$ **E** $\frac{18\pi}{5}$

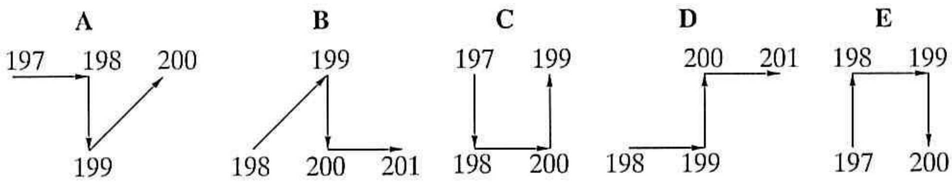
$\alpha.$ 281

$S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{39}$

A $S = 3k + 2$ **B** $S < 10^{10}$ **C** $S = \overline{a_1 \ldots a_{11}}$ **D** $S \vdots 10$ **E** $S \vdots 13$

$\alpha.$ 282





$\alpha.$ 283

$(125 - 1^3)(125 - 2^3) \cdot \ldots \cdot (125 - 5^3) = ?$

A 2000 **B** $125^5 - 5^5$ **C** $124 \cdot 123 \cdot 122$ **D** 0 **E** 124

$\alpha.$ 284

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2002}}}}}}}}}} - \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{5}}}}}}}}}} \approx ?$$

A 4 **B** 10 **C** 0,5 **D** 1 **E** 0,005

Spausdiname sąlygas uždavinių, kuriuos reikėjo išspręsti XVII Lietuvos komandinės matematikos olimpiadoje.

α. 285
◊◊◊

Išspręskite lygtį $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 = 0$.

α. 286
◊◊◊

Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ x^3 + y^3 = 2. \end{cases}$$

α. 287
◊◊◊

Raskite visus teigiamųjų skaičių ketvertus (x, y, z, t), tenkinančius lygčių sistemą

$$\begin{cases} x + y - zt = 0, \\ xy - z - t = 0, \\ xyzt = 16. \end{cases}$$

α. 288
◊◊◊

Realieji skaičiai x, y, z, t tenkina nelygybes $x + y + z + t < 0$, $xy + xz + xt + yz + yt + zt > 0$, $xyz + xyt + xzt + yzt < 0$ ir $xyzt > 0$. Įrodykite, kad $x, y, z, t < 0$.

α. 289
◊◊◊

Įrodykite, kad bent vienas iš skaičių $x - xy$, $y - yz$, $z - xz$ ne didesnis kaip $\frac{1}{4}$, kai $x, y, z \geqslant 0$.

α. 290
◊◊◊

Realiojo skaičiaus $x \neq 0$ atvirkštiniu yra vadinamas skaičius $\frac{1}{x}$. Yra žinoma, kad keturių nenulinių skaičių suma ir jų atvirkštinių suma yra lygios nuliui. Įrodykite, kad tarp tų keturių skaičių yra du, kurių suma lygi nuliui.

α. 291
◊◊◊

Raskite mažiausią funkcijos

$$f(x) = -2\sqrt{3}\cos(3x)\sin(6x)$$

įgyjamą reikšmę, kai x — realusis skaičius.

α. 292
◊◊◊

Įrodykite, kad $10^n + 45n - 1$ dalijasi iš 27, kai n — natūralusis skaičius.

α. 293
◊◊◊

Įrodykite, kad egzistuoja toks natūralusis skaičius n, kad skaičiaus 2^n dešimtainėje išraiškoje yra ne mažiau kaip 2002 iš eilės einantys nuliai.

α. 294
◊◊◊

Raskite mažiausią natūralųjį skaičių, kurio pusė yra sveikojo skaičiaus kvadratas, trečdalis yra sveikojo skaičiaus kubas, o penktadalis yra sveikojo skaičiaus penktasis laipsnis.

α. 295
◊◊◊

Tegul

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 2, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n a_{n-1} + 1}{a_{n-1}}, \qquad n = 2, 3, \dots .$$

Įrodykite, kad $a_n > \sqrt{2n}$, kai $n \geqslant 3$.

α. 296
◊◊◊

Ar egzistuoja tokie sveikieji skaičiai a ir b, kad skaičiai

$$\left(a + \frac{1}{2}\right)^n + \left(b + \frac{1}{2}\right)^n$$

taip pat būtų sveikieji su kiekvienu natūraliuoju n?

α. 297
◊◊◊

Ar egzistuoja toks šimtojo laipsnio daugianaris $p(x)$ su realiaisiais koeficientais, kad

$$p(0) > |p(1)| + |p(2)| + \cdots + |p(2001)| + |p(2002)|?$$

α. 298
◊◊◊

Raskite visas funkcijas $f(x)$, apibrėžtas su kiekvienu realiuoju x ir tenkinančias sąlygas

$$f(f(x)) = x, \qquad f(1 + f(x)) = 1 - x.$$

α. 299
◊◊◊

Raskite visas funkcijas $f(x)$, apibrėžtas su kiekvienu realiuoju x ir tenkinančias sąlygą

$$f(x^2 + y^2 - 2xy) = f^2(x) + y^2 - 2xf(y).$$

α. 300

◇◇◇

Per metus mokyklos bibliotekoje apsilankė 410 mokinių. Jie iš viso paėmė 5081 knygą. Ar galima tvirtinti, kad yra 18 mokinių, kurie iš viso paėmė ne mažiau kaip 224 knygas?

α. 301

◇◇◇

Šachmatų lentoje 8×8 pastatomas karalius, kuriam leidžiama daryti tik tokius ėjimus: arba per vieną langelį į kairę, arba per vieną langelį į apačią, arba per vieną langelį įstrižaine aukštyn dešinėn. Ar jis gali 64 ėjimais apeiti visą lentą taip, kad kiekviename langelyje apsilankytų po vieną kartą ir sugrįžtų į pradinį langelį?

α. 302

◇◇◇

Kokią didžiausią reikšmę gali įgyti į vienetinį apskritimą įbrėžto keturkampio kraštinių sandauga?

α. 303

◇◇◇

Į smailųjį trikampį ABC įbrėžto kvadrato dvi viršūnės priklauso kraštinei BC, kitos dvi priklauso AB ir AC, o jo kraštinė yra lygi a. Analogiškai, tegul b ir c yra kraštinės dar dviejų kvadratų, kurių po dvi viršūnes priklauso atitinkamai AC ir AB, o kitos dvi – atitinkamai AB, BC ir AC, BC. Įrodykite, kad

$$\frac{BC}{a} + \frac{AC}{b} + \frac{AB}{c} > 5 + \sqrt{2}.$$

α. 304

◇◇◇

Plokštumoje nubrėžti penki apskritimai. Bet kokie keturi iš jų turi bent vieną bendrą tašką. Ar visada tie penki apskritimai turi bent vieną bendrą tašką?