

SIUVYKLOS UŽDAVINYS

Mūsų žurnalo 2002 metų pirmajame numeryje buvo paskelbtas toks uždavinys.

Siuvykla per tam tikrą laiką turėjo pasiūti 160 kostiumų. Priėmus į darbą dar du siuvėjus, užduotis buvo įvykdyta 4 dienomis anksčiau, negu planuota. Per kiek dienų siuvykla turėjo užbaigti darbą?

Skaitytojus uždavinys sudomino. Išties ir atsakymas įdomus: per lyginį skaičių dienų, bet ne trumpiau kaip vieną darbo savaitę. Įdomi ir išvada apie tą siuvyklą: jeigu siuvykla turėjo užbaigti darbą per labai daug dienų, vadinasi, joje dirbo labai daug siuvėjų.

Kostiumai gali būti įvairūs

1. Pirmiausia pabandykime spręsti taip, kaip tikriausiai turėtų spręsti dešimtokai, t. y. apsiribokime natūraliais skaičiais.

Sakykime, kad siuvykloje dirba s siuvėjų, kurie per d dienų, pasiūdami po k kostiumų per dieną, pasiuva 160 kostiumų. Taigi

$$dks = 160; \quad \text{čia } d, k, s \text{ — natūralieji skaičiai.}$$

Priėmus dar du siuvėjus, dirbo $s + 2$ siuvėjai $d - 4$ dienas:

$$(d - 4)k(s + 2) = 160.$$

Iš dviejų lygybių gauname:

$$ds = (d - 4)(s + 2), \quad d = 2s + 4 = 2(s + 2).$$

Įstatome į pirmąją lygybę:

$$2s(s + 2)k = 160, \quad s(s + 2)k = 80.$$

Skaičiaus 80 dalikliai yra 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40 ir 80. Reikia iš jų išrinkti du, kurių vienas už kitą būtų didesnis dvejetu. Kaip matome, s ir $(s + 2)$ gali būti tik 2 ir 4 arba 8 ir 10.

Kai $s = 2$ ($s + 2 = 4$), tada $k = 10$, $d = 8$.

Kai $s = 8$ ($s + 2 = 10$), tada $k = 1$, $d = 20$.

Gavome, kad *siuvykla užsakymą turėjo įvykdyti per 8 dienas (dirbo 2 siuvėjai, pasiūdami po 10 kostiumų per dieną) arba per 20 dienų (dirbo 8 siuvėjai, pasiūdami po 1 kostiumą per dieną)*. Abu atvejai galimi, nes jei tie kostiumai, pvz., naujagimiams, galima pasiūti net ir daugiau negu 10 kostiumų per dieną. Priėmus dar du siuvėjus, siuvykla baigė darbą atitinkamai per 4 ir 16 dienų, t. y. keturiomis dienomis anksčiau.

Atsakymas. Per 8 arba per 20 dienų.

2. Apskritai niekas nedraudžia siuvėjui per dieną siūti ne natūralųjį skaičių kostiumų (pvz., $\frac{1}{2}$ ar $1,2$ kostiumo per dieną). Šiuo atveju pasirėmę gauta lygybe

$$d = 2(s + 2), \quad \text{čia } s \text{ ir } d \text{ — natūralieji skaičiai,}$$

gauname: kai $s = 1$, tai $d = 6$; kai $s = 2$, tai $d = 8$ ir t. t. Vadinasi, *gamykla užsakymą turėjo įvykdyti per bet koki lyginį, ne mažesnę kaip 6, skaičių dienų: 6, 8, 10, 12, 14, ...* (Kostiumų, pasiuvamų per dieną, skaičių galima rasti iš lygybės $k = \frac{80}{s(s+2)}$.) Vėl pakankamai daug atsakymų — tikroviški. Juk žinome, kad karališkieji kostiumai, siuvinėti visokiais perliukais, gali būti siuvami ir ilgiau nei kelis mėnesius. O čia — 160 kostiumų...

Atsakymas. Per $2(s + 2)$ dienų, čia s — bet koks natūralusis skaičius.

Rita Gasiukevičienė

Siuvėjai irgi būna įvairūs

Galima spėti, kaip „gimė“ šitas uždavinys. Greičiausiai buvo praleistas sakiny, kad „kiekvienas siuvėjas per dieną pasiuva vieną kostiumą“. Jūs galite pasakyti, kad tai keista siuvykla, kurioje dirba ne siuvėjai, ir kad vargu ar siuvėjas per dieną pasiuva vieną kostiumą. Atsakysime, kad tai smulkmena: matematika — tai abstrakcija, ir visiškai nesvarbu, kad gamtoje nėra tiesių, gyvenime nebūna iracionaliųjų skaičių ir pan. Ne kartą matėme, kad stengimasis „surrealinti“ uždavinį veda prie katastrofos — prisiminkime garsųjį uždavinį apie tapetus, kuriuos klijuojant nurašoma ne 10%, o *apie* 10% tapetų. Žmogui, remontuojančiam butą, aišku, kad kai reikia maždaug 8 rulonų, tai perkami 9 rulonai. O ką daryti vargšui abiturientui? Iš klaidų retai pasimokoma: tas pat įvyko šimet per valstybinį egzaminą, kai vietoj žodžio „greitis“ į sąlygą buvo įrašyta „vidutinis greitis“ — uždavinys tapo tiesiog nekorektiškas: atsakymas priklauso nuo važiavimo grafiko. Pavyzdžiui, jeigu automobilis važiuoja vidutiniu greičiu 100 km/h, tai jis pusę laiko gali važiuoti 10 km/h greičiu, o kitą pusę — 190 km/h...

Grįžkime prie uždavinio. Ar būtinai reikia taisyti jo sąlygą? Atsakymas būtų — taip. Nes vargu ar galima uždrausti siuvėjui per dieną pasiūti $\frac{1}{2}$ kostiumo ir pan.

Nekyla abejonių, kad siuvėjų skaičių reikėtų laikyti sveikuju (o gal nebūtinai — juk dabar daug kas dirba puse etato?). Laikysime sveikuju ir dienų skaičių — kitaip visai pražūsime. O dabar galima rinktis — sąlygoje pasakyti, kad: arba 1) siuvėjas per dieną pasiuva 1 kostiumą, arba 2) siuvėjas per dieną pasiuva sveiką skaičių kostiumų, arba 3) apie tai nekalbėti.

1) Šiuo atveju uždavinys paprastas (koks ir turėjo būti vadovėlyje). Jeigu darbą buvo planuojama atlikti per d dienų, tai siuvėjų buvo $\frac{160}{d}$. Priėmus dar du jų pasidarė $\frac{160}{d} + 2$, jie dirbo $d - 4$ dienų, taigi

$$\left(\frac{160}{d} + 2\right)(d - 4) = 160.$$

Išsprendę gauname 20 dienų.

2) Šiuo atveju per dieną siuvėjo pasiuvamų kostiumų skaičių (natūralųjį!) pažymėkime k . Tada iš pradžių siuvėjų buvo $\frac{160}{d} : k = \frac{160}{kd}$, paskui $\frac{160}{kd} + 2$, taigi

$$\left(\frac{160}{kd} + 2\right)(d - 4)k = 160.$$

Šią lygtį išspręsti natūraliaisiais skaičiais nesunku:

$$(160 + 2dk)(d - 4) = 160d, \quad 2dk(d - 4) = 160 \cdot 4, \quad kd(d - 4) = 320.$$

Kadangi 320 nesidalija iš 3, tai ir $d - 4$ nesidalija iš 3. Vadinasi, atkrita $d = 3, 6, 9, \dots$ ir $d = 4, 7, 10, \dots$, taigi lieka patikrinti $d = 5, 8, 11, \dots$

Netinka $d = 5$, nes tada $k = 320 : 5 = 64$, o siuvėjų skaičius $\frac{160}{kd} = \frac{160}{5 \cdot 64}$ nėra sveikasis. Tinka $d = 8$, tada $k = 10$, o siuvėjų yra 2.

Netinka $d = 11$, nes 320 nesidalija iš 11. Netinka $d = 14$ ir 17, nes 320 nesidalija iš 7 ir 17. Tinka $d = 20$, tada $k = 1$ (o siuvėjų yra 8 — tai 1) atvejo sprendinys). Didesnis d netinka — tada $k < 1$ ir nebėra natūralus.

3) Šiuo atveju gauname tą pačią lygtį $kd(d - 4) = 320$. Kadangi k neprivalo būti sveikasis, tai tinka bet kuris natūralusis $d \geq 5$, o $k = \frac{320}{d(d-4)}$.

Pavyzdžiui: kai $d = 6$, tai $k = \frac{320}{26} = \frac{80}{3}$; kai $d = 7$, tai $k = \frac{320}{21}$; kai $d = 24$, tai $k = \frac{320}{20 \cdot 24} = \frac{2}{3}$.

Pabaigai — pasilinksminkime. Siuvėjus galima pakeisti sukirpėjais (o apie siuvyklos siuvėjus nekalbėti). Tada visai natūralu galvoti, kad per dieną sukirpėjas sukerpa sveiką skaičių kostiumų. O tuomet, kaip matėme 2) atveju, uždavinys turi du sprendinius: $d = 8$ ($k = 10$), $d = 20$ ($k = 1$). Uždavinys išgelbėtas? Vargu — visai neįsivaizduoju, kiek kostiumų per dieną *galėtų* sukirpti sukirpėjas ir kiek kostiumų jis *privalo* sukirpti...

Juozas Mačys

Trumpai drūtai

Tegul siuvykloje dirbo s siuvėjų, kurie darbą planavo baigti per d dienų. Tada vienas siuvėjas per 1 dieną turėjo pasiūti $\frac{160}{sd}$ kostiumų. Darbą atliko $s + 2$ siuvėjai per $d - 4$ dienas. Kadangi darbo našumas abiem atvejais vienodas, tai gauname lygtį

$$\frac{160}{sd} = \frac{160}{(s+2)(d-4)}$$

Iš čia

$$sd = (s+2)(d-4),$$

$$d = s + 2d - 4s - 8,$$

$$d = 2s + 4.$$

Taigi sąlygoje vienu duomenų per daug, o kitų trūksta. Sąlygoje nurodytas skaičius 160 nereikalingas, tačiau trūksta duomenų apie siuvėjų ar dienų skaičių.

Norėdami sužinoti atsakymą, sudarome lentelę, nurodančią siuvėjų ir dienų skaičių priklausomybę:

Planuota	Siuvėjų	s	1	2	3	4	5	6	7	...	20	...
	Dienų	d	6	8	10	12	14	16	18	...	44	...
Dirbta	Siuvėjų	$s + 2$	3	4	5	6	7	8	9	...	22	...
	Dienų	$d - 4$	2	4	6	8	10	12	14	...	40	...

Pranas Povilaitis



Ačiū už aktyvų šio uždavinio sprendimą. O dabar siūlau pabandyti įkirsti rimtesnį uždavinuką. Jį rasite viename pagrindinės mokyklos matematikos vadovėlių:

Ant stalo vazelėje yra keturių rūšių saldainių: šokoladinių, karamelinų, marmeladinių ir mėtinių. Keliais būdais iš vazelės galima paimti 7 saldainius?

Ten pateiktas ir jo sprendimas, tik man jis buvo per sunkus...

Valdas Vanagas