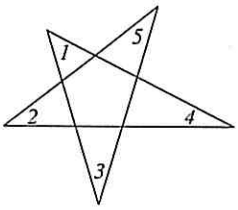
$\alpha + \omega$, 2002, Nr. 2, 65–68

Vienas uždavinys — vienuolika jo sprendimo būdų

Kazimieras Pulmonas

Straipsnyje išdėstyti keli uždavinio apie penkiakampės žvaigždės vidaus kampų sumą sprendimo būdai. Geras „geometrinių variacijų" viena tema pavyzdys.

Yra tokia nerašyta matematikos mokymo(-si) metodikos taisyklė, kurią galima nusakyti, pavyzdžiui, taip „Geriau vieną uždavinį išspręsti keletu būdų, negu kelis analogiškus uždavinius — vienu būdu". Ar visuomet tai įmanoma padaryti? Dažnai taip! Bet tai priklauso nuo daugelio dalykų. Nemažai lemia uždavinių sprendėjo erudicija, kertinių sprendimo būdų žinojimas, nuovokumas ir dar daug kas. Pagaliau — ieškojimų ir kūrybos polėkis, nestandartinis mąstymas.



Devintos klasės matematikos vadovėlyje yra toks uždavinys ([1], 522 užd.):

Raskite bet kurios penkiakampės žvaigždės kampų ($\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5$) *sumą.*

Mokytojo knygoje ([2], p. 171) pateiktas toks jo sprendimas:

$\angle 6 = \angle 1 + \angle 4$; $\quad \angle 7 = \angle 2 + \angle 5$ (*priekampio savybė*).

Kadangi

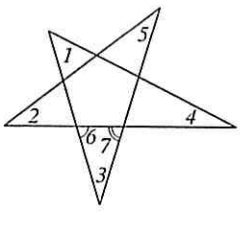
$$\angle 3 + \angle 6 + \angle 7 = 180°,$$

tai

$$\angle 3 + \angle 1 + \angle 4 + \angle 2 + \angle 5 = 180°.$$

Vadinasi,

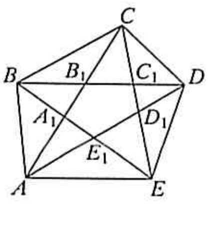
$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 180°.$$



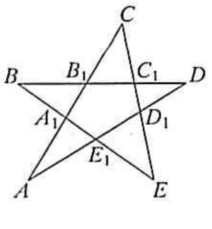
Šis uždavinys buvo pateiktas 2000 metų abiturientams per valstybinio brandos egzamino pagrindinę sesiją kaip paskutinė — 17-oji užduotis. Už jos teisingą sprendimą buvo skiriami 4 taškai.

Vertinimo instrukcijoje buvo numatyti du sprendimo būdai.

Pirmasis sprendimo būdas. Papildykime brėžinį ir pažymėkime jame taškus A_1, B_1, C_1, D_1, E_1.



Pastebėkime, kad ieškoma žvaigždės $ABCDE$ kampų suma gaunama iš penkiakampio $ABCDE$ kampų sumos atėmus trikampių AA_1B, BB_1C, CC_1D, DD_1E, EE_1A kampų sumą ir pridėjus kampų AA_1B, BB_1C, CC_1D, DD_1E, EE_1A sumą (ši suma yra lygi penkiakampio $A_1B_1C_1D_1E_1$ vidaus kampų sumai). Pasinaudosime tuo, kad trikampio kampų suma lygi π, o iškilojo penkiakampio kampų suma lygi 3π. Gauname $3\pi - 5\pi + 3\pi = \pi$.



Antrasis sprendimo būdas. Pasinaudoję trikampio kampų sumos savybe, gauname:

$$\triangle AB_1D\colon\ \angle A + \angle B_1 + \angle D = 180^\circ,$$
$$\triangle BC_1E\colon\ \angle B + \angle C_1 + \angle E = 180^\circ,$$
$$\triangle CD_1A\colon\ \angle C + \angle D_1 + \angle A = 180^\circ,$$
$$\triangle DE_1B\colon\ \angle D + \angle E_1 + \angle B = 180^\circ,$$
$$\triangle EA_1C\colon\ \angle E + \angle A_1 + \angle C = 180^\circ;$$

čia $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$, $\angle E$, $\angle A_1$, $\angle B_1$, $\angle C_1$, $\angle D_1$, $\angle E_1$ — atitinkamų trikampių kampai. Sudėję lygybes, turime

$$2(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E) =$$
$$= 5 \cdot 180^\circ - (\angle A_1 + \angle B_1 + \angle C_1 + \angle D_1 + \angle E_1).$$

Pritaikę daugiakampio kampų sumos formulę, randame

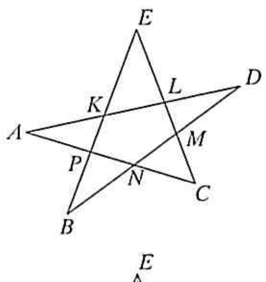
$$\angle A_1 + \angle B_1 + \angle C_1 + \angle D_1 + \angle E_1 = 180^\circ(5-2) = 3 \cdot 180^\circ.$$

Ieškoma penkiakampės žvaigždės kampų suma

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = \frac{5 \cdot 180^\circ - 3 \cdot 180^\circ}{2} = 180^\circ.$$

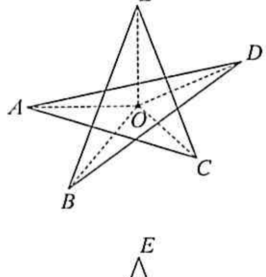
Yra ir daugiau šio uždavinio sprendimo būdų. Visus juos galima suskirstyti į tris grupes. Kadangi žvaigždės kampų suma yra lygi 180°, tai šią sumą mintyse galima „surinkti" arba trikampyje, arba ištiestiniame kampe, arba kampus suprojektuoti į apskritimą.

Štai dar keletas šio įdomaus uždavinio sprendimų.



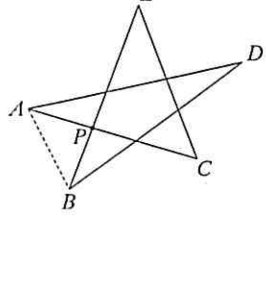
1. Iš penkių trikampių KAP, PBN, NCM, MDL, LEK kampų sumos atėmę penkiakampio $KPNML$ priekampių dvigubą sumą, gauname penkiakampės žvaigždės kampų sumą

$$180^\circ \cdot 5 - 360^\circ \cdot 2 = 180^\circ.$$



2. Sujunkime žvaigždės vidaus tašką O su jos viršūnėmis. Žvaigždės kampų suma yra lygi trikampių OAD, OAC, OBE, OBD, OCE kampų sumos ir dvigubo pilnutinio kampo O skirtumui. Taigi

$$180^\circ \cdot 5 - 360^\circ \cdot 2 = 180^\circ.$$



3. „Surinkime" žvaigždės kampus trikampyje ABD. Žvaigždės kampai A, B ir D jau yra trikampyje ABD, o

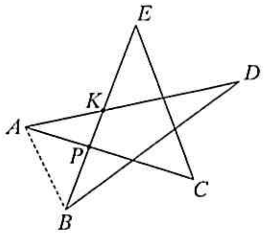
$$\angle C + \angle E = \angle EPA \quad \text{(priekampio savybė).}$$

Bet

$$\angle EPA = \angle PAB + \angle PBA.$$

Taigi

$$\angle A + \angle B + \angle D + \angle PAB + \angle PBA = 180°,$$
$$\angle A + \angle B + \angle D + \angle C + \angle E = 180°.$$



4. „Surinkime“ žvaigždės kampus trikampyje ABP.

$$\angle C + \angle E = \angle PAB + \angle PBA \quad \text{(žr. 3 sprendimą)},$$
$$\angle APB = \angle A + \angle AKP.$$

Bet

$$\angle AKP = \angle B + \angle D.$$

Todėl

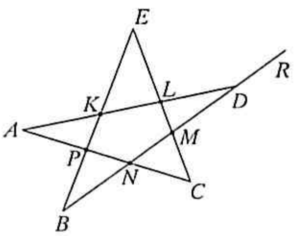
$$\angle APB = \angle A + \angle B + \angle D.$$

Kadangi

$$\angle PAB + \angle PBA + \angle APB = 180°,$$

tai

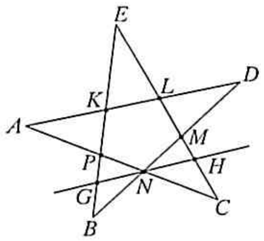
$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = 180°.$$



5. „Surinkime“ žvaigždės kampus į ištiestinį kampą, kurio viršūnė yra D. Žvaigždės kampas D jau yra šiame ištiestiniame kampe. Įrodykime, kad $\angle LDR = \angle A + \angle B + \angle C + \angle E$. Ši lygybė išplaukia iš trijų lygybių:

$$\angle LDR = \angle B + \angle BKL, \qquad \angle BKL = \angle E + \angle ELK,$$
$$\angle ELK = \angle A + \angle C.$$

Todėl $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = 180°$.



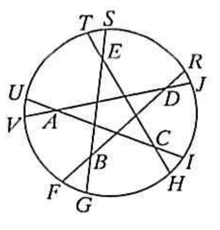
6. Per tašką N nubrėžkime tiesę GH, lygiagrečią su atkarpa AD. Šį kartą žvaigždės kampus „surinkime“ į ištiestinį kampą, kurio viršūnė yra N.

$$\angle A = \angle HNC, \qquad \angle D = \angle GNB,$$
$$\angle BNC = \angle B + \angle BPN = \angle B + \angle C + \angle E.$$

Sudėję šias tris lygybes, gauname:

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle E + \angle D =$$
$$= \angle HNC + \angle CNB + \angle BNG = 180°.$$

7. Apie žvaigždę nubrėžiame apskritimą taip, kad jos kampai būtų apskritimo viduje ir suprojektuojame žvaigždės kampus į apskritimą, t. y. kampus išreiškiame apskritimo lankų didumais.
Pasiremkime teiginiu: *Kampas tarp apskritimo viduje susikertančių stygų yra matuojamas lankų, esančių tarp šių stygų galų, sumos pusei.* ([3], 6 sk. 32 užd.).



Taigi

$$\angle A = \frac{1}{2}(\smile IJ + \smile UV), \qquad \angle B = \frac{1}{2}(\smile RS + \smile FG),$$

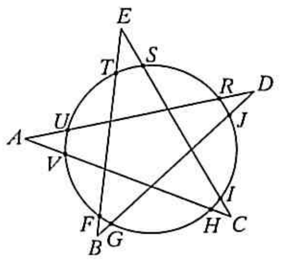
$$\angle C = \frac{1}{2}(\smile TU + \smile HI), \qquad \angle D = \frac{1}{2}(\smile VF + \smile JR),$$

$$\angle E = \frac{1}{2}(\smile GH + \smile ST).$$

Sudedame lygybes panariui:

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E =$$
$$= \frac{1}{2}(\smile IJ + \smile UV + \smile RS + \smile FG + \smile TU + \smile HI +$$
$$+ \smile VF + \smile JR + \smile GH + \smile ST) = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ.$$

8. Nubrėžkime apskritimą taip, kad jis kirstų kiekvieną žvaigždės kampų kraštinę. Pasiremkime teiginiu: *Kampas tarp dviejų apskritimo kirstinių yra matuojamas lankų, esančių tarp šių kirstinių, skirtumo puse* ([3], 6 sk. 32 užd.).



Tada:

$$\angle A = \frac{1}{2}(\smile HI + \smile IJ + \smile JR - \smile UV),$$

$$\angle B = \frac{1}{2}(\smile JR + \smile RS + \smile ST - \smile FG),$$

$$\angle C = \frac{1}{2}(\smile ST + \smile TU + \smile UV - \smile HI),$$

$$\angle D = \frac{1}{2}(\smile UV + \smile VF + \smile FG - \smile JR),$$

$$\angle E = \frac{1}{2}(\smile FG + \smile GH + \smile HI - \smile ST).$$

Sudėję lygybes panariui, gauname

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E =$$
$$= \frac{1}{2}(\smile HI + \smile IJ + \smile JR - \smile UV + \smile JR + \smile RS + \smile ST -$$
$$- \smile FG + \smile ST + \smile TU + \smile UV - \smile HI + \smile UV + \smile VF +$$
$$+ \smile FG - \smile JR + \smile FG + \smile GH + \smile HI - \smile ST) =$$
$$= \frac{1}{2}(\smile IJ + \smile JR + \smile RS + \smile ST + \smile TU + \smile UV +$$
$$+ \smile VF + \smile FG + \smile FG + \smile GH + \smile HI) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ.$$

1. *Matematika* 9, II *dalis*, TEV, Vilnius, 2001.
2. *Matematika* 9, *Mokytojo knyga*, TEV, Vilnius, 2001.
3. *Matematika* 9, *Uždavinynas*, TEV, Vilnius, 2001.