$\alpha + \omega$, 2002, Nr. 2, 62–64

Kodėl cos $\frac{180°}{17}$ *iracionalus?*

Juozas Mačys
jmacys@ktl.mii.lt

Straipsnyje įrodomas teiginys, kad $\cos\frac{m°}{n}$, *kai* m, n *— sveikieji skaičiai, įgyja tik penkias racionalias reikšmes* 0; $\pm\frac{1}{2}$; ± 1, *o kitos reikšmės yra iracionalios. Analogiški teiginiai įrodyti sinusui ir tangentui.*

Straipsnyje „Kodėl cos 17° iracionalus?“ (žr. [1]) įrodėme, kad $\cos n°$ (n — sveikasis) įgyja tik iracionaliąsias reikšmes (išskyrus 0, $\pm\frac{1}{2}$, ± 1). Dabar įrodysime, kad $\cos\frac{m°}{n}$ (m, n — sveikieji) taip pat įgyja tik iracionaliąsias reikšmes (išskyrus 0, $\pm\frac{1}{2}$, ± 1).

Egzistuoja gražus geometrinis šio fakto įrodymas (žr. [2]). Deja, jis ilgokas, ir norisi ko nors paprastesnio, algebriško.

Iš tikrųjų mes jau žinome ne tik tai, kad sveikųjų laipsnių kosinusas iracionalus — kai ką galime pasakyti ir apie trupmeninius laipsnius. Pavyzdžiui, iš karto galime teigti, kad $\cos\frac{20°}{17}$ iracionalus. Minėtame straipsnyje jau įrodėme teoremą: *Jeigu* $\cos n\alpha$ *iracionalus, tai ir* $\cos\alpha$ *iracionalus.* Kadangi $\cos 20°$ iracionalus, tai ir $\cos\frac{20°}{17}$ iracionalus, nes $20°$ yra kampo $\frac{20°}{17}$ kartotinis: $20° = 17 \cdot \frac{20°}{17}$.

Taigi klausimas lieka atviras tik, pavyzdžiui, nagrinėjant kampus $\frac{60°}{17}$, $\frac{180°}{17}$ — jų kartotinių $60°$ ir $180°$ kosinusas racionalus. Tada pasinaudoti teorema nebegalime (jeigu kartotinio kampo $n\alpha$ kosinusas racionalus, tai apie $\cos\alpha$ bendru atveju nieko pasakyti negalime: nors $\cos 180° = 0$ racionalus, bet $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ iracionalus, o $\cos 60° = \frac{1}{2}$ — racionalus).

Todėl liko išnagrinėti kampus $\frac{m\cdot 60°}{n}$, arba (tai tas pat) kampus $\frac{m\cdot 360°}{n}$ (žinoma, taip užrašyti galima bet kurį racionalųjį laipsnių skaičių: $\frac{p°}{q} = \frac{p\cdot 360°}{360q}$). Įrodysime, kad $\cos\frac{m\cdot 360°}{n}$ iracionalus visada, išskyrus reikšmes 0, $\pm\frac{1}{2}$, ± 1. Kitais žodžiais tariant, įrodysime, kad $\cos\frac{m\cdot 360°}{n}$ negali įgyti kitų racionaliųjų reikšmių kaip 0, $\pm\frac{1}{2}$, ± 1 (puikiai žinome, kada šias reikšmes kosinusas įgyja). Kadangi tas įrodymas tinka visoms racionaliosioms argumento reikšmėms, tai kartu gauname įrodymą, kad ir sveikojo laipsnių skaičiaus kosinusas iš racionaliųjų reikšmių gali įgyti tik minėtąsias.

Mūsų įrodymas remiasi tomis pačiomis idėjomis, kaip ir $\cos 20°$ iracionalumo įrodymas. Tik ten užteko trigubojo kampo kosinuso formulės ir kubinės lygties, o čia prireiks n-gubojo kampo kosinuso ir n-ojo laipsnio lygties.

Minėtame straipsnyje jau įrodėme, kad $\cos n\alpha$ galima išreikšti n-ojo laipsnio daugianariu. Kitaip sakant, įrodėme, kad

$$\cos n\alpha = P_n(\cos\alpha);$$

čia $P_n(x)$ yra n-ojo laipsnio daugianaris

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Galima būtų parašyti tą $\cos n\alpha$ išraišką ir ją įrodyti, bet mums to neprireiks ir užteks kur kas paprasčiau įrodomo teiginio.

1 lema. $2\cos n\alpha$ *galima išreikšti n-ojo laipsnio daugianariu $2\cos\alpha$ atžvilgiu; to daugianario koeficientai sveikieji, o vyriausiasis koeficientas lygus 1*:

$$2\cos n\alpha = (2\cos\alpha)^n + a_{n-1}(2\cos\alpha)^{n-1} + a_{n-2}(2\cos\alpha)^{n-2} + \cdots. \tag{1}$$

Įrodymas. Kai $n = 1$, tai $2\cos\alpha = 2\cos\alpha$; kai $n = 2$, tai $2\cos 2\alpha = (2\cos\alpha)^2 - 2$.

Kadangi $\cos(n+2)\alpha + \cos n\alpha = 2\cos\alpha\cos(n+1)\alpha$, tai $\cos(n+2)\alpha = 2\cos\alpha\cos(n+1)\alpha - \cos n\alpha$. Vadinasi, jeigu mūsų teiginys teisingas su n ir $n+1$, tai jis teisingas ir su $n+2$. Remiantis matematinės indukcijos principu, lema įrodyta.

2 lema. *Jeigu daugianario su sveikaisiais koeficientais vyriausiasis koeficientas lygus* 1, *tai daugianario racionaliosios šaknys yra sveikieji skaičiai.*

Įrodymas. Tarkime, kad daugianaris

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

turi racionaliąją šaknį $x_0 = \frac{p}{q}$; be to, p ir q galime laikyti neturinčiais bendrų daliklių, išskyrus ± 1. Tada teisinga lygybė

$$\frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0.$$

Padauginkime abi lygties puses iš q^{n-1}:

$$\frac{p^n}{q} + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1pq^{n-2} + a_0q^{n-1} = 0.$$

Visi kairiosios pusės dėmenys, pradedant antruoju, yra sveikieji skaičiai, todėl ir $\frac{p^n}{q}$ — sveikasis skaičius. Bet p ir q neturi bendrų daliklių, todėl $q = \pm 1$. Vadinasi, $x_0 = \pm p$ ir racionalioji šaknis yra sveikasis skaičius. Lema įrodyta.

Imkime (1) formulėje $\alpha = \frac{m\cdot 360^\circ}{n}$ ir pasižymėkime $2\cos\frac{360^\circ m}{n} = x$. Gauname

$$2\cos 360^\circ m = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots,$$

arba

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots - 2 = 0. \tag{2}$$

Tarkime, kad $\cos\frac{360^\circ m}{n}$ racionalus. Kadangi (2) daugianario vyriausiasis koeficientas lygus 1, tai remiantis 2 lema jo racionaliosios šaknys yra sveikosios, todėl $2\cos\frac{360^\circ m}{n}$ yra sveikasis skaičius. Bet $\left|2\cos\frac{360^\circ m}{n}\right| \leqslant 2$, taigi $2\cos\frac{360^\circ m}{n}$ gali būti tik lygus 0, ± 1, ± 2, o $\cos\frac{360^\circ m}{n}$ tik lygus 0, $\pm\frac{1}{2}$, ± 1.

Taigi įrodėme, kad $\cos\frac{m^\circ}{n}$ visada iracionalus, išskyrus tuos atvejus, kai jis lygus 0, $\pm\frac{1}{2}$, ± 1. Galima pasakyti ir taip: $\cos r^\circ$ su racionaliais r visada iracionalus, išskyrus reikšmes $r = 60k$ ir $r = 180k + 90$, $k \in \mathbb{Z}$.

Kadangi $\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = \frac{2}{1+\cos 2\alpha} - 1$, tai $\operatorname{tg}^2 r^\circ$ su racionaliaisiais r racionalus tik tada, kai $\cos 2\alpha$ racionalus, t. y. kai $\cos 2\alpha = 0$, $\pm\frac{1}{2}$, 1. Kai $\cos 2\alpha = 0$, tai $\operatorname{tg} 2\alpha = 1$; kai $\cos 2\alpha = -\frac{1}{2}$, tai $\operatorname{tg}^2\alpha = 3$; kai $\cos 2\alpha = \frac{1}{2}$, tai $\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{3}$; kai $\cos 2\alpha = 1$, tai $\operatorname{tg}^2\alpha = 0$. Matome, kad $\operatorname{tg} r^\circ$ gali būti racionalus tik tada, kai $\operatorname{tg} r^\circ = 0$ ir kai $\operatorname{tg} r^\circ = \pm 1$, t. y. kai $r = 180k$ ir $r = 180k \pm 45$.

Dar paprasčiau su sinusu: jeigu $\sin r^\circ$ argumentas r racionalus, tai ir $\cos(90^\circ - r^\circ)$ argumentas $90 - r$ racionalus. Vadinasi, $\sin r^\circ$, kai r racionalus, iš racionalių reikšmių gali įgyti tik reikšmes 0, $\pm\frac{1}{2}$, ± 1. Kitaip sakant, $\sin r^\circ$ su racionaliaisiais r visada iracionalus, išskyrus reikšmes $r = 90k$ ir $r = 180k \pm 30$, $k \in \mathbb{Z}$.

Susumuokime įrodytus rezultatus.

Teorema. *Jeigu argumentas išreikštas racionaliuoju laipsnių skaičiumi, tai sinuso bei kosinuso reikšmės (išskyrus 0, $\pm\frac{1}{2}$, ± 1) ir tangento reikšmės (išskyrus 0, ± 1) iracionalios. Negana to — tokios sinuso kvadrato, kosinuso kvadrato reikšmės (išskyrus 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 1) ir tangento kvadrato reikšmės (išskyrus 0, $\frac{1}{3}$, 1, 3) iracionalios.*

Taigi labai prasiplėtė iracionaliųjų skaičių ratas: jeigu anksčiau žinojome, kad iracionalūs yra skaičiai $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ir pan., tai dabar įsitikinome, kad iracionalios yra „beveik visos" trigonometrinių funkcijų (kai argumentas išreikštas racionaliuoju laipsnių skaičiumi) reikšmės: $\sin 17^\circ$, $\sin\frac{1^\circ}{17}$, $\cos 19^\circ$, $\operatorname{tg}\frac{2^\circ}{7}$ ir pan.

Negana to — galime teigti, kad, pavyzdžiui, $\arcsin\frac{1}{3}$, išreikštas laipsniais, yra iracionalus. Iš tikrųjų, tarkime priešingai — kad $\arcsin\frac{1}{3} = r^\circ$. Tada $\sin r^\circ = \frac{1}{3}$. Bet žinome, kad racionaliojo laipsnių skaičiaus sinusas visada iracionalus arba lygus 0, $\pm\frac{1}{2}$, ± 1. Gavome prieštarą. Analogiškai įsitikiname, kad iracionaliuoju laipsnių skaičiumi išreiškiami $\arcsin r$ (r — racionalus, $r \neq 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1$), $\arccos r$ (r — racionalus, $r \neq 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1$) ir $\operatorname{arctg} r$ (r — racionalus, $r \neq 0, \pm 1$).

Ir dar — nesusipainiokime: įrodėme, kad $\sin 1^\circ$ iracionalus, bet tai nereiškia, kad $\sin 1$ (vieno radiano sinusas) bus iracionalus. Kalbant radianų kalba, įrodėme, kad $\sin\frac{\pi}{17}$, $\cos 17\pi$ ir apskritai $\sin r\pi$, $\cos r\pi$, $\operatorname{tg} r\pi$ (r racionalus) iracionalūs (išskyrus gerai žinomas reikšmes).

Tiesa, galima įrodyti, kad $\sin 1$, $\cos\frac{1}{17}$ ir apskritai $\sin r$, $\cos r$, $\operatorname{tg} r$ (argumentas — racionalus nelygus nuliui radianų skaičius) yra iracionalūs, bet tai jau kita tema.

1. J. Mačys, Kodėl cos 17° iracionalus?, *Alfa plius omega*, **1**, 75–77, 2002.
2. А. Нивен, *Числа рациональные и иррациональные*, Мир, Москва, 1966 (žr. knygos priedą И. М. Яглом, Доказательство иррациональности значений тригонометрических функций, p. 168–187).

KREIPIMASIS

2002 m. rugpjūčio 21 d. patvirtintos Lietuvos bendrojo lavinimo mokyklos programos ir išsilavinimo standartai. Švietimo strategai kviečia svarstyti, tobulinti šį dokumentą. Atsiliepkime! Jūsų nuomones, pasiūlymus ir mintis apie matematinį švietimą mielai skelbsime žurnalo puslapiuose.