$\alpha + \omega$, 2002, Nr. 2, 58–61

Matematinės indukcijos metodas

Bronė Narkevičienė, Leonas Narkevičius
bronar@gim.ktu.lt, leonasn@gim.ktu.lt

Straipsnyje pateikiama keletas lygybių įrodymo naudojantis matematine indukcija pavyzdžių ir uždavinių savarankiškam sprendimui.

Sprendžiant matematikos olimpiados uždavinius neretai tenka išsivesti kokį nors kintamųjų sąryšį. Paskaičiavę su keliomis reikšmėmis spėjame, kad teisinga tam tikra lygybė. Tačiau su visomis galimomis kintamųjų reikšmėmis jos patikrinti neįmanoma. Kaip žinoti, ar mūsų užrašytoji lygybė yra teisinga? Tam labai praverčia *matematinės indukcijos metodas*. Jis remiasi tokiu teiginiu:

Teiginys $T(n)$, priklausantis nuo natūraliojo skaičiaus n, teisingas su bet kuriuo skaičiumi n, jeigu tenkinamos dvi sąlygos:

1) *teiginys $T(n)$ teisingas, kai $n = 1$;*

2) *iš to, kad teiginys $T(n)$ teisingas, kai $n = k$ ($k \in \mathbb{N}$), išplaukia, kad jis teisingas ir kai $n = k + 1$.*

Pirmiausia pateiksime tapatybių įrodymo, remiantis matematinės indukcijos metodu, pavyzdžių.

1 pavyzdys. Įrodykime, kad

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1}$$

Įrodymas. 1) Kai $n = 1$, tai $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$. Ši lygybė teisinga, todėl (1), kai $n = 1$, teisinga.

2) Tarkime, kad (1) lygybė teisinga, kai $n = k$, t. y.

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

3) Įrodykime, kad (1) lygybė teisinga ir kai $n = k + 1$, t. y.

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Pasinaudoję prielaida, kad (1) lygybė teisinga su $n = k$, gauname

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Taigi $1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$. Remiantis matematinės indukcijos principu, (1) lygybė teisinga, kai n yra bet kuris natūralusis skaičius.

2 pavyzdys. Įrodykime, kad teisinga lygybė

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2. \tag{2}$$

Įrodymas. 1) Kai $n = 1$, tai $1^3 = 1^2$. Ši lygybė teisinga, todėl (2), kai $n = 1$, teisinga.

2) Tarkime, kad (2) lygybė teisinga, kai $n = k$, t. y.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + k)^2.$$

3) Įrodykime, kad (2) lygybė teisinga, kai $n = k + 1$, t. y.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \big(1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1)\big)^2.$$

Pasinaudoję prielaida, kad (2) lygybė teisinga su $n = k$, ir 1 pavyzdžio lygybe, gauname

$$\begin{aligned}1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 + (k+1)^3 &= (1 + 2 + 3 + \dots + k)^2 + (k+1)^3 = \\ = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 &= (k+1)^2\Big(\frac{k^2}{4} + k + 1\Big) = (k+1)^2\frac{(k+2)^2}{4} = \\ = \Big(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\Big)^2 &= \big(1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1)\big)^2.\end{aligned}$$

Vadinasi, (2) lygybė teisinga, kai n yra bet kuris natūralusis skaičius.

3 pavyzdys. Įrodykime, kad

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{2^2}{3\cdot 5} + \frac{3^2}{5\cdot 7} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}. \tag{3}$$

Įrodymas. 1) Kai $n = 1$, tai $\frac{1}{1\cdot 3} = \frac{1\cdot 2}{2\cdot 3}$. Ši lygybė teisinga, todėl (3) teisinga, kai $n = 1$.
2) Tarkime, kad (3) lygybė teisinga, kai $n = k$, t. y.

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{2^2}{3\cdot 5} + \dots + \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k(k+1)}{2(2k+1)}.$$

3) Įrodykime, kad (3) lygybė teisinga, kai $n = k + 1$, t. y.

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{2^2}{3\cdot 5} + \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}.$$

Iš tikrųjų

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{2^2}{3\cdot 5} + \dots + \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)} = \\ &= \frac{k(k+1)}{2(2k+1)} + \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+1}\Big(\frac{k}{2} + \frac{k+1}{2k+3}\Big) = \\ &= \frac{k+1}{2k+1}\cdot\frac{2k^2+5k+2}{2(2k+3)} = \frac{(k+1)(2k+1)(k+2)}{2(2k+1)(2k+3)} = \frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}.\end{aligned}$$

Taigi galima teigti, kad (3) lygybė teisinga, kai n yra bet kuris natūralus skaičius.

4 pavyzdys. Įrodykime, kad su visomis galimomis x reikšmėmis teisinga lygybė

$$\begin{aligned}&\Big(x - \frac{1}{x}\Big)^2 + \Big(x^2 - \frac{1}{x^2}\Big)^2 + \dots + \Big(x^n - \frac{1}{x^n}\Big)^2 = \\ &= \frac{1}{x^2-1}\Big(x^{2n+2} - \frac{1}{x^{2n}}\Big) - 2n - 1, \quad x \neq -1, 0, 1.\end{aligned} \tag{4}$$

Įrodymas. 1) Kai $n = 1$, lygybė teisinga, nes

$$S_1 = \frac{1}{x^2-1}\Big(x^4 - \frac{1}{x^2}\Big) - 3 = \frac{(x^2-1)^2}{x^2} = \Big(x - \frac{1}{x}\Big)^2.$$

2) Tarkime, kad (4) lygybė yra teisinga, kai $n = k$, t. y.

$$S_k = \Big(x - \frac{1}{x}\Big)^2 + \Big(x^2 + \frac{1}{x^2}\Big)^2 + \dots + \Big(x^k - \frac{1}{x^k}\Big)^2 = \frac{1}{x^2-1}\Big(x^{2k+2} - \frac{1}{x^{2k}}\Big) - 2k - 1.$$

3) Įrodykime, kad (4) lygybė teisinga, kai $n = k + 1$, t. y.

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + \cdots + \left(x^k - \frac{1}{x^k}\right)^2 + \left(x^{k+1} - \frac{1}{x^{k+1}}\right)^2 = \\ &= \frac{1}{x^2 - 1}\left(x^{2k+4} - \frac{1}{x^{2k+2}}\right) - 2(k+1) - 1. \end{aligned}$$

Iš tikrųjų

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \left(\frac{1}{x^2 - 1}\right)\left(x^{2k+2} - \frac{1}{x^{2k}}\right) - 2k - 1 + \left(x^{k+1} - \frac{1}{x^{k+1}}\right)^2 = \\ &= \frac{x^{4k+4} - x^2 + x^{4k+6} - x^{4k+4} + x^2 - 1}{(x^2 - 1)x^{2k+2}} - 2(k+1) - 1 = \\ &= \frac{1}{x^2 - 1}\left(x^{2k+4} - \frac{1}{x^{2k+2}}\right) - 2(k+1) - 1. \end{aligned}$$

Taigi (4) lygybė teisinga su visais natūraliaisiais skaičiais n, t. y.

$$\begin{aligned} &\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + \cdots + \left(x^n - \frac{1}{x^n}\right)^2 = \\ &= \frac{1}{x^2 - 1}\left(x^{2n+2} - \frac{1}{x^{2n}}\right) - 2n - 1, \quad x \neq -1, 0, 1, \ n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

5 pavyzdys. Apskaičiuokime sumą

$$S_n = 1 - 3 + 5 - 7 + \cdots + (-1)^{n+1}(2n - 1).$$

Kitais žodžiais tariant, raskime paprastesnę išraišką, į kurią įstatę n reikšmę iš karto gautume n narių sumą.

Sprendimas. Kai $n = 1$, tai $S_1 = 1$; kai $n = 2$, tai $S_2 = 1 - 3 = -2$; kai $n = 3$, tai $S_3 = 1 - 3 + 5 = 3$; kai $n = 4$, tai $S_4 = 1 - 3 + 5 - 7 = -4$.

Remiantis išnagrinėtais atskirais atvejais, galima spėti, kad $S_n = (-1)^{n+1}n$. Matematinės indukcijos metodu įrodykime, kad šis teiginys teisingas, t. y.

$$S_n = 1 - 3 + 5 - 7 + \cdots + (-1)^{n+1}(2n - 1) = (-1)^{n+1}n. \tag{5}$$

1) Ši lygybė teisinga, kai $n = 1, 2, 3, 4$. Tai jau įrodyta anksčiau.

2) Tarkime, kad (5) lygybė teisinga, kai $n = k$, t. y.

$$S_k = 1 - 3 + 5 - 7 + \cdots + (-1)^{k+1}(2k - 1) = (-1)^{k+1}k.$$

3) Įrodykime, kad (5) lygybė teisinga, kai $n = k + 1$, t. y.

$$S_{k+1} = 1 - 3 + 5 - 7 + \cdots + (-1)^{k+1}(2k - 1) + (-1)^{k+2}(2k + 1) = (-1)^{k+2}(k + 1).$$

Iš tikrųjų

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + (-1)^{k+2}(2k + 1) = (-1)^{k+1}k + (-1)^{k+2}(2k + 1) = \\ &= (-1)^{k+2}(-k + 2k + 1) = (-1)^{k+2}(k + 1). \end{aligned}$$

Remiantis matematinės indukcijos principu, teigiame, kad (5) lygybė teisinga su bet kuriuo $n \in \mathbb{N}$.

Vadinasi,

$$S_n = 1 - 3 + 5 - 7 + \cdots + (-1)^{n+1}(2n - 1) = (-1)^{n+1}n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Toliau pateikiame uždavinius be sprendimų. Manome, kad skaitytojas juos nesunkiai išspręs pats, kartu įvaldydamas šį gražų matematinį metodą.

Uždaviniai

Įrodykite, kad teisingos šios lygybės:

1. $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2. $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
3. $2^2+4^2+8^2+\cdots+(2n)^2=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$.
4. $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}$.
5. $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.
6. $1\cdot2^2+2\cdot3^2+3\cdot4^2+\cdots+(n-1)n^2=\frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$.
7. $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots+n(n+1)(n+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$.
8. $3+3^2+3^3+\cdots+3^n=\frac{3(3^n-1)}{2}$.
9. $2\cdot2^0+3\cdot2^1+4\cdot2^2+\cdots+(n+1)2^{n-1}=n\cdot2^n$.
10. $\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n}{2(n+2)}$.
11. $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$.
12. $\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$.
13. $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$.

Apskaičiuokite sumas:

14. $S_n=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$.
15. $S_n=\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.
16. $S_n=\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.
17. $S_n=\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$.
18. $S_n=\frac{1}{4\cdot7}+\frac{1}{7\cdot10}+\cdots+\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$.
19. $S_n=1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}$.
20. $S_n=1+3+5+\cdots+(2n-1)$.
21. $S_n=-1+3-5+7-9+\cdots+(-1)^n(2n-1)$.
22. $S_n=1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{n-1}n^2$.

Atsakymai. 14. $\frac{n}{n+1}$; 15. $\frac{n}{2n+1}$; 16. $\frac{n}{3n+1}$; 17. $\frac{n}{2(n+2)}$; 18. $\frac{n}{4(3n+4)}$; 19. 2^n-1; 20. n^2; 21. $(-1)^n n$; 22. $(-1)^n\frac{n(n+1)}{2}$.