$\alpha + \omega$, 2002, Nr. 2, 36–41

Vaizdumas ir logika. Dar kartą uždavinys apie keturkampį

Petras Vaškas

Analizuodamas vieną valstybinio matematikos egzamino uždavinį, straipsnio autorius pabrėžia, kad sprendimai, paremti vaizdumu, nėra išsamūs, neatsižvelgia į visus galimus atvejus.

Vaizdumo ir logikos ryšys bene labiausiai ryškus geometrijoje. Matyt, pagrįstai teigiama, kad, palyginti su kitomis matematikos šakomis, elementariosios (sakykime, mokyklinės) geometrijos ypatumas yra tas, jog čia griežta logika siejama su vaizdumu, loginė analizė — su vientisu dalyko suvokimu. Galima sakyti, kad iš esmės geometrija yra organiškas griežtos logikos ir vaizdumo junginys, t. y. griežta logika paremtas sukonstruotas vaizdinys ir vaizdiniu pagyvinta logika. Jei nėra vieno iš tų dalykų, nėra ir tikrosios geometrijos.

Tai prisiminti privertė šiais metais žurnale [1] išspausdintas Valdo Vanago rašinys „Achilo kulnas" ir Viliaus Stakėno rašinys „Rudenį pasirodys...".

V. Vanagas atkreipia dėmesį į labai nekonkrečią pagrindinės mokyklos geometrijos programą, leidžiančią ją per daug laisvai interpretuoti ir padedančią jos autoriams išvengti bet kokios atsakomybės dėl mokinių geometrinių žinių lygio.

Tą patį galima daryti ir su XI–XII klasės geometrijos programa. Kad taip daroma (mano nuomone, ne geriausiu būdu), aiškėja iš V. Stakėno rašinio, skirto XI klasės vadovėliui.

Nors 2001 11 13 programos projekte parašyta „Planimetrija. Pagrindinės mokyklos planimetrijos kurso sisteminimas ir išplėtimas (pabraukta autoriaus): planimetrijos aksiomų pavyzdžiai, teoremos ir jų įrodymo būdai", pristatant XI klasės vadovėlį apie tą dalį tiesiog rašoma: „Kas turės laiko juos perskaityti ir prisiminti — tas prisimins, susistemins savo geometrijos žinias, kas neturės — tikriausiai irgi nepražus". (Kokia parama tiems, kurie ir turėdami laiko neskaito!) O kur kurso išplėtimas?

Tam tikras neatitikimas tarp programos projekto (XI–XII klasių) pateiktų bendrųjų reikalavimų, fragmentiško programos išdėstymo ir standartų, taip pat tai, kad mokytojai dažnai orientuojasi tik į praėjusių metų brandos egzaminų užduotis ir jas „lydinčius" pasiruošti brandos egzaminams skirtus leidinius (per dažnai prastokos kokybės), verčia manyti priešingai: išsamesnis pagrindinių sąvokų apibūdinimas yra būtinas. Maža to, be programos autorių, atsakomybė pirmiausia tenka vadovėlių autoriams bei rengiantiems leidinius.

Tai pailiustruosiu, rodos, jau garsiu tampančiu uždaviniu apie keturkampį ([2], 18 užd.):

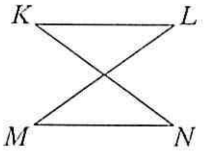
1. *Įrodykite teiginį „Paeiliui sujungę iškilojo keturkampio kraštinių vidurio taškus gauname lygiagretainį".* (3 *taškai*)
2. *Ar teisingas šis teiginys neiškilajam keturkampiui? Atsakymą pagrįskite.* (2 *taškai*)

Kadangi lygiagretainiu vadinamas keturkampis, kurio priešingosios kraštinės yra lygiagrečios, tai reikia įrodyti du teiginius: 1) taip gauname keturkampį; 2) tas keturkampis yra lygiagretainis.

Primename, kad „keturkampiu vadinama plokštumos dalis, kurią riboja savęs nekertanti uždara laužtė, sudaryta iš 4 grandžių" [3]. (Panašiai šios sąvokos apibrėžiamos ir senesniuose vadovėliuose.)

Kaip įrodysime pirmą iš minėtų teiginių? Vertinimo instrukcijoje to nereikalaujama. Išeitų, kad tai laikoma aksioma. Gerai. Tačiau tada pačią uždavinio sąlygą reikėtų formuluoti kitaip: įrodykite, kad keturkampis, gautas paeiliui sujungus iškilojo keturkampio kraštinių vidurio taškus, yra lygiagretainis.

Kai iš anksto nežinome, ar tai keturkampis, padaryta išvada nėra visiškai pagrįsta. Juk iš 1 paveikslo matyti, kad $KL \parallel MN$ ir $KL = MN$, tačiau uždaroji keturgrandė laužtė $KLMN$ nėra lygiagretainis (ji nėra keturkampis).



1 pav.

Įrodymas, kad $KL \parallel MN$, taip pat nėra išsamus. Jei $a \parallel c$ ir $b \parallel c$, tai tiesės a ir b gali sutapti (būti ta pati tiesė, tik skirtingomis raidėmis pažymėta). Dabar mokykliniame kurse tokios tiesės nelaikomos lygiagrečiomis. Taigi padarytos ne loginės išvados, kaip turėtų būti įrodant, o pasiremta tik vaizdumu.

Ta pačia proga tenka nors trumpai pažvelgti į Liucijos Nadtočij [3] pateiktą uždavinio apie keturkampį sprendimą.

Iš lygybių $KL = MN$ ir $LM = KN$ (raidės ten kitos) daroma išvada, kad $KLMN$ — lygiagretainis (bet žr. 1 pav.). Gal dar remiamasi vaizdumu (nes pateikti paveikslai), bet kurioje vietoje ir kaip — neaišku (skaičiavimams jie nereikalingi).

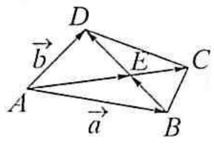
Nesigilindami, kaip išspręsti uždavinį remiantis pagrindinės mokyklos kurso žiniomis, išnagrinėsime su tuo susijusius kelis uždavinius, spręsdami juos vektoriniu metodu.

Sąlygos

1. *Duoti vektoriai* $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ ($\vec{a} \nparallel \vec{b}$), $\overrightarrow{AC} = k\vec{a} + m\vec{b}$ ($k \geqslant 0$, $m \geqslant 0$). *Su kuriomis k ir m reikšmėmis taškai A, B, C, D yra keturkampio $ABCD$ viršūnės?*
2. *Su kuriomis k ir m reikšmėmis keturkampis $ABCD$ yra iškilasis; neiškilasis?*
3. *Įrodykite, kad paeiliui sujungus atkarpomis iškilojo keturkampio $ABCD$ kraštinių AB, BC, CD, DA vidurio taškus K, L, M, N gaunamas lygiagretainis.*

4. *Ar teisingas 3 uždavinio teiginys neiškilajam keturkampiui? Atsakymą pagrįskite.*
5. *Suformuluokite 3 ir 4 uždavinių rezultatus vienu teiginiu (teorema).*

Sprendimai



2 pav.

1. Kad taškai A, B, C, D būtų keturkampio $ABCD$ viršūnės, pirmiausia jokie trys iš jų neturi būti vienoje tiesėje. Kadangi $\vec{a} \nparallel \vec{b}$, tai gauname, kad taškai A, B, D nėra vienoje tiesėje (2 pav.).

Kad taškai A, B, C nebūtų vienoje tiesėje, turi būti $m \neq 0$.

Kad taškai A, D, C nebūtų vienoje tiesėje, turi būti $k \neq 0$.

Be to, ir taškai B, D, C neturi būti vienoje tiesėje. Panagrinėkime šį atvejį. Sakykime, E — tiesės BD taškas,

$$\overrightarrow{BE} = n\overrightarrow{BD}.$$

Tada

$$\overrightarrow{BE} = n(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}), \qquad \overrightarrow{BE} = -n\vec{a} + n\vec{b};$$
$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}, \qquad \overrightarrow{AE} = (1-n)\vec{a} + n\vec{b}.$$

Taškas C bus tiesės BD taškas, kai jis sutaps su kuriuo nors tašku E. Tada

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE}, \quad \text{arba} \quad k\vec{a} + m\vec{b} = (1-n)\vec{a} + n\vec{b}.$$

Iš čia, remdamiesi vektoriaus reiškimo dviem nekolineariais vektoriais vienareikšmiškumu, gauname: $k = 1 - n$, $m = n$, todėl $k + m = 1$.

Sąlygos $k > 0$, $m > 0$, $k + m \neq 1$ yra pakankamos, kad jokie trys iš taškų A, B, C, D nebūtų vienoje tiesėje.

Kad taškai A, B, C, D būtų keturkampio $ABCD$ viršūnės atkarpos AD ir BC bei AB ir DC neturi turėti bendrų vidaus taškų.

Kai P — atkarpos AD vidaus taškas, $\overrightarrow{AP} = p\overrightarrow{AD} = p\vec{b}$, $0 < p < 1$.

Kai R — atkarpos BC vidaus taškas,

$$\overrightarrow{BR} = r\overrightarrow{BC}, \quad 0 < r < 1;$$
$$\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BR} = \overrightarrow{AB} + r\big(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\big) =$$
$$= (1 + (k-1)r)\vec{a} + mr\vec{b}.$$

Atkarpos AD ir BC turės bendrą vidaus tašką, kai bus tokie p ir r, kad $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AP}$. Tarę, kad $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AP}$, gauname lygčių sistemą

$$\begin{cases} (1-k)r = 1, \\ p - mr = 0. \end{cases}$$

Jei $k = 1$, ši lygčių sistema neturi sprendinių.

Jei $k \neq 1$, šios sistemos sprendinys yra $\left(\frac{m}{1-k}; \frac{1}{1-k}\right)$.

Jei $k < 1$, tai $\frac{1}{r} = 1 - k < 1$, $r > 1$; jei $k > 1$, tai $p < 0$, $r < 0$. Taigi p ir r netenkina papildomų sąlygų.

Vadinasi, atkarpos AD ir BC neturi bendrų vidaus taškų. Panašiai įrodytume, kad atkarpos AB ir CD neturi bendrų vidaus taškų.

Taigi anksčiau gautos sąlygos ($k < 0$, $m > 0$, $k+m \neq 1$) yra būtinos ir pakankamos, kad taškai A, B, C, D būtų keturkampio $ABCD$ viršūnės.

2. Aišku, kad keturkampis $ABCD$ yra:

iškilasis, kai $\overrightarrow{AC} = s\overrightarrow{AE}$, $s > 1$;

neiškilasis, kai $\overrightarrow{AC} = s\overrightarrow{AE}$, $0 < s < 1$.

Iš lygybės $\overrightarrow{AC} = s\overrightarrow{AE}$ gauname, kad

$$k\vec{a} + m\vec{b} = s\big((1-n)\vec{a} + n\vec{b}\big);$$
$$k = s(1-n), \qquad m = sn, \qquad k + m = s.$$

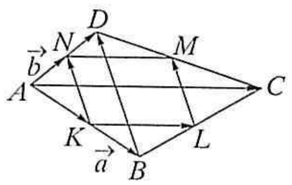
Taigi keturkampis $ABCD$ yra iškilasis, kai $k + m > 1$, neiškilasis, kai $k + m < 1$.

3. Iš sąlygos gauname (3 pav.), kad

$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \qquad \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.$$

Tada

$$\overrightarrow{KN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AK}, \qquad \overrightarrow{KN} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}.$$



3 pav.

Pastaba. Kadangi

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a},$$

tai $\overrightarrow{KN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. Taigi įrodėme (patvirtinome, jei buvo įrodyta kitaip ir panaudota nagrinėjant vektorius) tokią savybę: trikampio vidurinė linija yra lygiagreti su viena trikampio kraštine ir lygi pusei tos kraštinės. Toliau šia savybe remsimės.

Kadangi LM yra trikampio BCD vidurinė linija, tai

$$\overrightarrow{LM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}.$$

Palyginę vektorių $\overrightarrow{KN}$ ir $\overrightarrow{LM}$ išraiškas, gauname $\overrightarrow{KN} = \overrightarrow{LM}$.

Taškai K, L, M, N 3 paveiksle nėra vienoje tiesėje. Tačiau tai galima įrodyti ir bendruoju atveju.

Atkarpa KL yra trikampio ABC vidurinė linija, todėl

$$\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}k\vec{a} + \frac{1}{2}m\vec{b}.$$

Taškai K, L, M, N yra vienoje tiesėje tik tada, kai vektoriai $\overrightarrow{KL}$ ir $\overrightarrow{KN}$ yra kolinearūs. Jie kolinearūs tik tada, kai jų išraiškų nekolineariais vektoriais $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ koeficientai yra proporcingi:

$$\frac{1}{2}k : \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}m : \frac{1}{2}, \quad \text{arba} \quad k + m = 0.$$

Ši sąlyga nėra tenkinama (žr. 1 uždavinį), todėl $\overrightarrow{KL} \nparallel \overrightarrow{KN}$. Vadinasi, $KN \parallel LM$.

Panašiai įrodytume, kad $KL \parallel NM$.

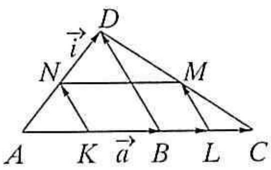
Iš sąlygų $KN \parallel LM$ ir $KL \parallel NM$ gauname, kad keturkampis $KLMN$ yra lygiagretainis.

4. Teiginys teisingas ir neiškilajam keturkampiui. Įrodymas niekuo nesiskirtų nuo 3 teiginio įrodymo, nes ten teko pasinaudoti tik tuo, kad $ABCD$ yra keturkampis. Skirtųsi tik paveikslas, kuris padeda geriau orientuotis, bet nėra įrodymo pagrindas.

5. Bendras 3 ir 4 uždavinių rezultatas šitoks: keturkampio (iškilojo ar neiškilojo) kraštinių vidurio taškus paeiliui sujungę atkarpomis, gauname lygiagretainį.

6. Iš 3 ir 4 teiginių gauname, kad taškai K, L, M, N vienoje tiesėje gali būti tik tada, kai taškai A, B, C, D nėra keturkampio $ABCD$ viršūnės.

a) Vienas tokių atvejų — trys taškai (pavyzdžiui, A, B, C) yra vienoje tiesėje, ketvirtas taškas (D) nėra toje tiesėje (4 pav.). Šiuo atveju $\overrightarrow{AC} = k\vec{a}$, t. y. $m = 0$.



4 pav.

Galima sakyti, kad akivaizdu, jog šiuo atveju taškai K, L, M, N nėra vienoje tiesėje. Tačiau tai galima ir įrodyti. Tai ir padarykime. Dar įrodykime, kad šiuo atveju $KLMN$ taip pat yra lygiagretainis.

Atkarpos KN ir LM yra trikampių BAD ir BCD vidurinės linijos, todėl

$$\overrightarrow{KN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}, \qquad \overrightarrow{LM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}, \qquad \overrightarrow{KN} = \overrightarrow{LM} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}.$$

Be to,

$$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BL}, \qquad \overrightarrow{KB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB},$$

$$\overrightarrow{BL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}),$$

$$\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}k\vec{a}.$$

Vektorių $\overrightarrow{KL}$ ir $\overrightarrow{KN}$ išraiškų nekolineariais vektoriais $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ atitinkami koeficientai nėra proporcingi:

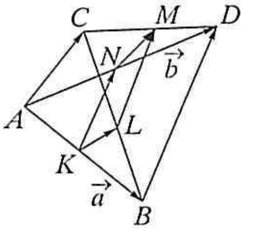
$$\frac{1}{2}k : \left(-\frac{1}{2}\right) \neq 0 : \frac{1}{2}.$$

Vadinasi, $\overrightarrow{KL} \nparallel \overrightarrow{KN}$, taškai K, L, M, N nėra vienoje tiesėje, $KN \parallel LM$.

Nesunkiai gautume, kad ir $KL \parallel NM$. Iš $KN \parallel LM$ ir $KL \parallel NM$ gauname, kad $KLMN$ yra lygiagretainis.

b) Kitas atvejis — visi keturi taškai A, B, C, D yra vienoje tiesėje. Aišku, kad toje tiesėje yra ir taškai K, L, M, N.

c) Liko išnagrinėti atvejį, kai taškai A, B, C, D nėra keturkampio $ABCD$ viršūnės dėl to, kad, pavyzdžiui, atkarpos BC ir AD susikerta (5 pav.).



5 pav.

Ir šiuo atveju (remiamės trikampio vidurinės linijos savybe):

$$\overrightarrow{KN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}, \qquad \overrightarrow{LM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD},$$

$$\overrightarrow{KN} = \overrightarrow{LM} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}.$$

Kadangi

$$\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}k\vec{a} + \frac{1}{2}m\vec{b},$$

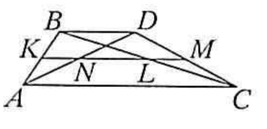
tai taškai K, L, M, N vienoje tiesėje bus tada ir tik tada, kai

$$\frac{1}{2}k : \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}m : 1, \quad \text{t. y.} \quad m = -k.$$

Tačiau tada

$$\overrightarrow{BD} = \vec{b} - \vec{a}, \qquad \overrightarrow{AC} = k\vec{a} - k\vec{b} = -k\overrightarrow{BD},$$

taigi atkarpos AC ir BD yra lygiagrečios (6 pav.).



6 pav.

Suformuluokime šio uždavinio atsakymą. Taškai K, L, M, N vienoje tiesėje yra tada, kai: atkarpa BC kerta atkarpą AD, o atkarpos AC ir BD yra lygiagrečios, arba kai A, B, C, D yra skirtingi vienos tiesės taškai.

1. *Alfa plius omega*, **1**, 2002.
2. Matematikos valstybinio brandos egzamino užduotis 2001. Pagrindinė sesija.
3. *Matematika* 10, II *dalis*, TEV, Vilnius, 2001.
4. *Alfa plius omega*, **3**, 2001.