$\alpha + \omega$, 2002, Nr. 2, 23–25

Pagrindinė algebros teorema mokykloje

Juozas Mačys
jmacys@ktl.mii.lt

Pagrindinę algebros teoremą pravartu minėti jau mokykliniame matematikos kurse. Formuluojant teoremą kaip teiginį apie daugianarių skaidymą tiesiniais ir kvadratiniais daugikliais, ją galima įrodyti mokiniams prieinamu būdu.

Taip jau susiklostė, kad mūsų mokykloje nedėstomi kompleksiniai skaičiai (išskyrus fakultatyvą). Todėl mokykloje retai minima ir pagrindinė algebros teorema, kuri dažniausiai formuluojama taip:

Kiekviena n-ojo laipsnio lygtis turi bent vieną kompleksinę šaknį.

Nagrinėjant kompleksinius skaičius paminėti ją labai natūralu. Kai buvo atsisakyta kompleksinių skaičių, kartu buvo nustota kalbėti ir apie pagrindinę algebros terоremą. O visai be reikalo — ta teorema turi daug ekvivalenčių ir paprastų formuluočių, kuriose kompleksinių skaičių nė neprireikia. Apskritai, įvedus iracionaliuosius skaičius tiesė pasidaro pilna (nebeturi „skylių"), taigi nebėra jokio reikalo įvedinėti naujus skaičius.

Labai patogi mokykloje tokia pagrindinės algebros teoremos (kitaip — pagrindinės realiųjų daugianarių teoremos) formuluotė:

Kiekvieną daugianarį

$$P_n(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1x + c_0$$

su realiaisiais koeficientais galima išskaidyti į pirmojo laipsnio daugianarių (pavidalo $x + a$) ir neskaidžių antrojo laipsnio daugianarių (pavidalo $x^2 + px + q$, čia $p^2 - 4q < 0$) sandaugą.

Kodėl gi ši formuluotė nebeminima? Mat pagrindinė algebros teorema paprastai įrodoma remiantis kompleksiniais skaičiais. Taigi nors suformuluotoje teoremoje kompleksiniai skaičiai ir neminimi, bet jie kaip ir plevena ore.

Didysis Gausas pateikė net keletą pagrindinės algebros teoremos įrodymų, kuriuose nesiremiama kompleksiniais skaičiais — deja, juose prireikia integralų, algebrinių kreivių, algebrinių kūnų, jų plėtinių ir dar šio bei to.

Kartais aiškinama, kad kompleksiniai skaičiai būtini, nes jų prireikia net sprendžiant kubinę lygtį, turinčią tris realiąsias šaknis. Deja, toks aiškinimas neteisingas. Viena, tai įsišaknijusi klaida — visas tris šaknis galima užrašyti formulėmis ir nesinaudojant kompleksiniais skaičiais (kitas dalykas, kad jų negalima išreikšti formulėmis, į kurias įeitų tik radikalai, bet neįeitų kompleksiniai skaičiai — į minėtas formules įeina trigonometrinės funkcijos — arccos ir pan.). Antra, yra įrodyta, kad net naudojantis kompleksiniais skaičiais neįmanoma parašyti bent jau penktojo laipsnio lygčių formulių (jos tiesiog neegzistuoja).

Kitaip sakant, turėdami trečiojo ar ketvirtojo laipsnio lygtį, dar galime užrašyti formules, kurios padeda išskaidyti daugianarį. Bet tai jau neįmanoma turint penktojo laipsnio daugianarį. Kita vertus, žinome, kad penktojo laipsnio daugianaris visada turi bent vieną šaknį, ir nors formulė šaknims rasti neegzistuoja, suvokiame, jog tokia šaknis yra. Taigi penktojo laipsnio daugianarį galima išskaidyti ir t. t. (prisiminkime, kad apskritai algebrinės lygties su racionaliaisiais koeficientais racionaliąsias šaknis rasti paprasta, o bet kurios algebrinės lygties visas šaknis galima rasti norimu tikslumu). Todėl mūsų čia net nedomina klausimas apie trečiojo laipsnio daugianario skaidymą — žinome, kad jis (kaip ir kiekvienas nelyginio laipsnio daugianaris) turi šaknį, ir to mums gana teigiant, kad jį galima išskaidyti.

Mane seniai domino galimybė elementariai įrodyti šią teoremą nesiremiant kompleksiniais skaičiais. Neseniai pavyko tokį įrodymą sugalvoti. Tas įrodymas gana sudėtingas (pavyzdžiui, jame remiamasi $\cos n\alpha$ ir $\sin n\alpha$ formulėmis), nors visiškai prieinamas stipriam mokiniui. Bet svarbiausia — atsirado reali galimybė grąžinti į mokyklą pagrindinę algebros teoremą.

Visiškai suprantu, kad toks mokyklinio lygio įrodymas jau galėjo būti surastas anksčiau. Stengiausi apklausti kuo daugiau specialistų, ar jie nežino panašaus įrodymo. Bet jeigu ir paaiškėtų, kad toks įrodymas jau yra — dar geriau: gal jis bus paprastesnis ir prieinamas kiekvienam mokiniui.

Remiantis pagrindine algebros teorema, paprasta atsakyti į klausimą, kiek algebrinė lygtis turi sprendinių:

Algebrinė lygtis $P_n(x) = 0$ turi tiek sprendinių, kiek daugianaris $P_n(x)$ turi skirtingų tiesinių daugiklių.

Atkreipkite dėmesį — nereikia kalbėti nei apie realiųjų šaknų neturinčius kvadratinius trinarius, nei apie kartotines šaknis. Pavyzdžiui, lygtis

$$x(x-1)(x^4-1) = 0$$

turi tris sprendinius, nes daugianaris

$$P(x) = x(x-1)(x^4-1) = x(x-1)^2(x+1)(x^2+1)$$

turi tris skirtingus tiesinius daugiklius $x - 0$, $x - 1$ ir $x + 1$.

Tai visiškai aišku, bet faktiškai mes remiamės tokia teorema:

Jeigu daugianaris turi šaknį a, tai jo skaidinys turi daugiklį $x - a$. Atvirkščiai, jei daugianario skaidinys turi daugiklį $x - a$, tai jis turi šaknį a.

Jos įrodymas labai paprastas. Jeigu daugianaris $P_n(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1x + c_0$ turi šaknį a, tai $P_n(a) = a^n + c_{n-1}a^{n-1} + \cdots + c_1a + c_0 = 0$, todėl

$$\begin{aligned} P_n(x) &= P_n(x) - P_n(a) = \\ &= x^n + c_{n-1}x^{n-1} + c_1x + \cdots + c_0 - (a^n + c_{n-1}a^{n-1} + \cdots + c_1a + c_0) = \\ &= (x^n - a^n) + c_{n-1}(x^{n-1} - a^{n-1}) + \cdots + c_1(x - a). \end{aligned}$$

Kiekvienas dėmuo turi daugiklį $x - a$, nes $x^k - a^k = (x-a)(x^{k-1} + x^{k-2}a + \cdots + xa^{k-2} + a^{k-1})$ (pastarąją lygybę galima patikrinti sudauginus, o galima pasakyti, kad tai geometrinės progresijos sumos formulė). Taigi ir suma $P_n(x)$ turi daugiklį $x - a$.

Atvirkštinis teiginys dar paprastesnis. Jeigu $P_n(x)$ turi daugiklį $x - a$, tai

$$P_n(x) = (x-a)P_{n-1}(x).$$

Bet tada $P_n(a) = 0$, taigi a yra jo šaknis.

Vadinasi, jeigu daugianaris turi šaknį, tai galima išskirti atitinkamą tiesinį daugiklį. Šitą procedūrą tęsiant galimi du atvejai: arba $P_n(x)$ bus išskaidytas į tiesinių daugiklių sandaugą, arba jis bus išskaidytas į sandaugą tiesinių daugiklių ir daugianario, kuris nebeturi šaknų.

Taigi sprendžiant algebrines lygtis užtenka rasti visus tiesinius daugiklius, o juos išskyrus, likusio daugianario, kuris teigiamas su visais x, skaidyti ir nebereikia. Pavyzdžiui, sprendžiant lygtį $(x-1)(x^4+1)=0$ užtenka pastebėti, kad $x^4+1>0$ su visais x, ir visiškai nebereikia skaidyti daugianario x^4+1, nors tai ir nesudėtinga: $x^4+1=x^4+2x^2+1-2x^2=(x^2+1)^2-(x\sqrt{2})^2=$ $=(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1)$.

Kitas dalykas, kad reikia įsitikinti, jog likęs daugianaris tikrai nebeturi šaknų, t. y. teigiamas su visomis x reikšmėmis. Tai dažnai pavyksta padaryti išreiškus tą daugianarį paprastesnių daugianarių kvadratais (beje, x^4 ir 1 išnagrinėtame pavyzdyje taip pat yra daugianarių kvadratai). Beje, teoriškai tai padaryti galima visada — čia ir vėl padeda pagrindinė algebros teorema. Iš tikrųjų, turint teigiamą daugianarį, jį galima išskaidyti teigiamais kvadratiniais trinariais:

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)=(x+a)^2+b^2, \quad b\neq 0.$$

Sudauginę du tokius trinarius, gauname

$$\left[(x+a_1)^2+b_1^2\right]\left[(x+a_2)^2+b_2^2\right]=\left[(x+a_1)(x+a_2)\right]^2+\left[b_1(x+a_2)\right]^2+\left[b_2(x+a_1)\right]^2+[b_1b_2]^2,$$

ir tęsdami gausime daugianarių kvadratų sumą.

Pasakysime dar kelis žodžius apie rastąjį pagrindinės algebros teoremos įrodymą. Matėme, jei daugianaris turi šaknį, tai jį galima išskaidyti. Todėl didžiausias sunkumas buvo įrodyti, kad galima išskaidyti daugianarį, kuris neturi šaknų. Kadangi nelyginio laipsnio daugianaris visada turi šaknį, tai užtenka kalbėti apie lyginio laipsnio daugianarius. Kitaip sakant, svarbiausia buvo įrodyti tokią lemą:

Sakykime, kad daugianaris $P_{2n}(x)>0$ su kiekvienu x. Tada galima rasti tokius p ir q ($p^2-4q<0$), kad daugianaris $P(x)$ dalijasi iš x^2+px+q.

Kada mokytojui būtų patogu paminėti pagrindinę algebros teoremą? Aišku, kad mokinys jau turi mokėti reiškinius skaidyti dauginamaisiais ir spręsti kvadratines lygtis. Vadinasi, toks paminėjimas derėtų susipažinus su minėtais dalykais iš karto arba bet kada vėliau, vėl su jais susidūrus.

I N F O

XVII Lietuvos komandinėje matematikos olimpiadoje dalyvavo 15 komandų iš 10 miestų: Vilniaus, Kauno, Panevėžio, Šiaulių, Utenos, Raseinių, Pasvalio, Kretingos, Visagino ir svečiai iš Minsko.

Pirmąsias 6 vietas užėmė šios komandos:

1. KTU gimnazijos I komanda
2. Minsko
3. Vilniaus licėjaus I komanda
4. Kretingos
5. Panevėžio
6. Pasvalio