$\alpha + \omega$, 2002, Nr. 1, 82

Šio skyrelio uždavinius iš Vilniaus pedagoginiame universitete rengiamo matematikų konkurso užduočių parinko doc. Algirdas Kaučikas.

α. 265

Realieji skaičiai x, y, z tenkina lygtį

$$\frac{x^2+y^2-z^2}{2xy}+\frac{y^2+z^2-x^2}{2yz}+\frac{z^2+x^2-y^2}{2zx}=1.$$

Įrodykite, kad dvi iš šių trijų trupmenų lygios 1.

α. 266

Išspręskite lygčių sistemas:

$$\text{a)}\ \begin{cases} 1+\frac{1}{x_1}=x_2, \\ 1+\frac{1}{x_2}=x_3, \\ 1+\frac{1}{x_3}=x_4, \\ 1+\frac{1}{x_4}=x_1; \end{cases} \qquad \text{b)}\ \begin{cases} x_1^2+x_2=1, \\ x_2^2+x_3=1, \\ x_3^2+x_4=1, \\ x_4^2+x_1=x_1. \end{cases}$$

α. 267

Raskite sveikuosius lygties $x^2+y^2=3z^2$ sprendinius.

α. 268

Įrodykite nelygybę $8(a^4+b^4) \geqslant (a+b)^4$, čia $a, b \in \boldsymbol{R}$.

α. 269

Plokštumoje nubrėžti 5 apskritimai. Žinoma, kad kiekvienas jų ketvertas turi bendrą tašką. Ar būtinai visi 5 apskritimai turės bendrą tašką?

α. 270

Raskite funkciją, kurios grafikas pereina pats į save, pasukus jį 90° kampu apie koordinačių pradžią.

α. 271

Kvadrato $ABCD$ taškas M toks, kad $\angle MBC = \angle MDB = 23°$. Raskite $\angle MAD$.

α. 272

Ar egzistuoja trikampis, kurio $a > 2{,}5m_a$, $b > 3m_b$?

α. 273

Apskritimas S_2 eina per apskritimo S_1 centrą O. Apskritimai kertasi taškuose A ir B. Apskritimo S_1 styga AC kerta apskritimą S_2 taške D. Įrodykite, kad $OD \perp BC$.