$\alpha + \omega$, 2002, Nr. 1, 8–16

Prof. J. Matulionio jaunųjų matematikų konkursas

Laima Papreckienė, Vidmantas Pekarskas
laima.papreckiene@fmf.ktu.lt,
vidmantas.pekarskas@fmf.ktu.lt

Straipsnyje rašoma apie prof. J. Matulionio jaunųjų matematikų konkursą, pateikiamos 2002 metų konkurso užduotys, jų sprendimai ir nugalėtojų sąrašas.

Profesorius Jonas Matulionis, techniškųjų specialybių studentams skirto dvitomio vadovėlio „Aukštoji matematika“ autorius, pedagoginį darbą universitete dirbo daugiau kaip 50 metų. Buvo puikus savo dėstomojo dalyko žinovas, reiklus ir dėmesingas kolegoms bei studentams.

Pateikiame žiupsnelį biografinių prof. J. Matulionio duomenų. Gimė 1906 02 01 Maskvoje, mirė 1993 06 08 Kaune. Matematiką studijavo VDU Matematikos-gamtos fakultete, kurį baigė 1934 m. Vėliau 1938–1941 m. mokytojavo Raseinių ir Vilkaviškio gimnazijose, buvo Raseinių gimnazijos inspektoriumi, direktoriumi. Nuo 1941 m. pradėjo dirbti Kauno universiteto Matematikos katedroje, 1945–1968 m. buvo Kauno universiteto (vėliau Kauno politechnikos instituto) Matematikos (Aukštosios matematikos, Bendrosios matematikos) katedros vedėjas, 1951–1965 m. — KPI Elektrotechnikos fakulteto dekanas, 1965–1976 m. — KPI Radioelektronikos fakulteto prodekanas. Nuo 1949 m. — docentas, nuo 1990 m. ėjo profesoriaus pareigas.

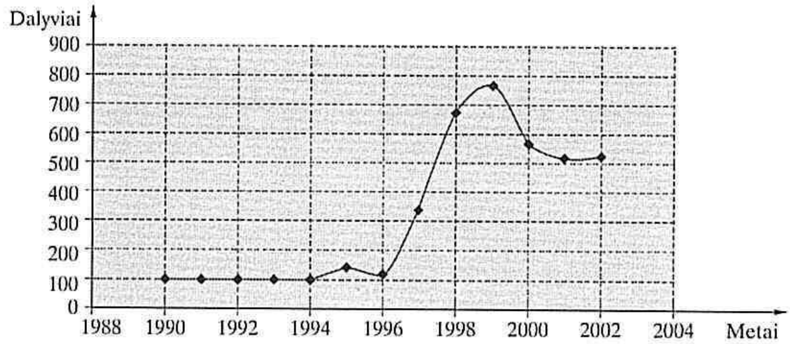
Dar profesoriui gyvam esant, KTU matematikai jo vardu pavadino jaunųjų matematikų konkursą, kasmet organizuojamą nuo 1990 metų. Pirmųjų dviejų konkursų nugalėtojams pagyrimo raštus įteikė pats prof. J. Matulionis.

Renginys sumanytas kaip konkursas visiems besidomintiems matematika Lietuvos IX–XII klasių moksleiviams be išankstinės atrankos. Į jį galima atvykti net nepranešus iš anksto. Toks jis išliko iki šiol.

Dalyviams pateikiami 5 uždaviniai, visa konkurso užduotis vertinama 20 balų. Daugiausia balų surinkusių dalyvių sąrašas pateikiamas Švietimo ir mokslo ministerijai, kuri nusprendžia, kiek jų pakviesti dalyvauti jaunųjų matematikų olimpiadoje. Vienais metais prof. J. Matulionio konkursą laimėjo jaunasis matematikas Giedrius Alkauskas. Jis buvo pakviestas dalyvauti jaunųjų matematikų olimpiadoje, kur taip pat tapo nugalėtoju.

Į pirmąjį konkursą buvo susirinkę apie 120 mokinių. Visiems susėdus amfiteatrinėje auditorijoje, konkursą įžanginiu žodžiu pradėjo organizavimo komiteto pirmininkas. Tokia graži, iškilminga konkurso pradžia tapo tradicija ir tęsėsi iki 1997 m. Vėliau šią tradiciją teko nutraukti, nes dalyviai nebetilpdavo į jokią KTU Elektronikos rūmų auditoriją. Pirmųjų penkių konkursų organizavimo komiteto pirmininku buvo prof. V. Pekarskas, vėlesnių — doc. L. Papreckienė.

Konkurso dalyvių skaičiaus dinamiką vaizdžiai iliustruoja diagrama. Daugiausia dalyvių — net 766 buvo 1999 m., o keletą pastarųjų metų jų skaičius artimas 500.



Į prof. J. Matulionio konkursą atvyksta moksleiviai iš visų Lietuvos kampelių. Tradiciškai gausiausios būna Kauno ir Vilniaus delegacijos, tačiau į konkursą atvažiuoja atstovai ir iš tolimų rajonų — Klaipėdos, Mažeikių, Skuodo, Biržų ir Rokiškio. Konkurso nugalėtojais dažniausiai tampa atstovai tų mokyklų, kuriose jau daug metų sustiprintai dėstomi tikslieji mokslai. Neabejotini lyderiai yra dvi Lietuvos mokyklos — KTU gimnazija ir Vilniaus tiksliųjų, gamtos ir technikos mokslų licėjus. Jas bando pavyti Panevėžio J. Balčikonio, Kauno „Saulės“, Mažeikių „Gabijos“, Kauno „Varpo“, Vilniaus ir Kauno jėzuitų, Visagino „Atgimimo“, „Gerosios Vilties“, Sedulinos, Utenos A. Šapokos gimnazijos ir kitos mokyklos.

Į nugalėtojų tarpą kartais įsiveržia ir kitų mokyklų atstovai. Štai į 2002 m. nugalėtojų sąrašą pateko moksleiviai iš Kretingos J. Pabrėžos bei Zarasų „Ąžuolo“ gimnazijų, Širvintų rajono Musninkų, Raseinių „Šaltinio“, Šiaulių St. Šalkauskio vidurinių mokyklų.

Konkurso nugalėtojai kasmet apdovanojami rėmėjų prizais. Mūsų konkursą nuolat remia Lietuvos matematikų draugija, KTU Rektorius, TEV ir „Šviesos“ leidyklos. Nuo pat pirmojo konkurso ištikimas rėmėjas yra firma „Samsonas“. Visiems jiems ir kitiems rėmėjams esame nuoširdžiai dėkingi.

KTU matematikai 2001 m. išleido knygutę „Respublikinio prof. J. Matulionio jaunųjų matematikų konkurso užduotys ir sprendimai“. Ją, kaip ir kitą KTU leidyklos „Technologija“ išleistą matematinę literatūrą, galima užsisakyti internete adresu *www.knygininkas.lt*.

Konkurso data kiekvienais metais nežymiai keičiasi. Ateityje konkursą numatome rengti pirmąjį vasario mėnesio šeštadienį ir tikimės, kad tą dieną nebus rengiamos nei informatikos, nei fizikos, nei kitos tiksliųjų mokslų olimpiados.

Pateikiame paskutinio — 13-ojo prof. J. Matulionio jaunųjų matematikų konkurso, vykusio 2002 02 02, užduotis, jų sprendimus, o taip pat — konkurso nugalėtojų sąrašą.

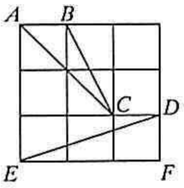
IX klasės užduotis

1. Trys broliai A, B ir C suderėjo namą už 320 000 litų. Brolis A galėtų sumokėti visą šią sumą, jeigu jam brolis B paskolintų penkis aštuntadalius savo pinigų; brolis B galėtų sumokėti reikalaujamąją sumą, jeigu jam brolis C paskolintų aštuonias devintąsias savo pinigų; galiausiai brolis C galėtų nupirkti šį namą, jeigu jam paskolintų brolis A pusę savo pinigų, o brolis B — tris šešioliktąsias savo pinigų. Kiek pinigų turėjo kiekvienas brolis? *(4 taškai)*
2. Be skaičiuoklių nustatykite, kuris iš dviejų skaičių didesnis: $(\sqrt{2}+\sqrt[3]{4})$ ar 3. *(4 taškai)*
3. Su kuriomis parametro a reikšmėmis lygtis $x+\sqrt{x}=a$ turi vienintelį sprendinį? *(4 taškai)*
4. Kiek yra skirtingų sveikųjų skaičių, lygių skirtumui $N-S$, kai N yra natūralusis dviženklis skaičius, o skaičius S gaunamas sukeitus vietomis skaičiaus N skaitmenis? Parašykite visus tuos skaičius. *(5 taškai)*
5. Į skritulio išpjovą (ketvirtadalį skritulio) įbrėžtas apskritimas, kurio ilgis lygus $12(\sqrt{2}-1)$. Koks yra skritulio išpjovos lanko ilgis? *(3 taškai)*

X klasės užduotis

1. Penkių plokštumos taškų koordinatės yra sveikieji skaičiai. Įrodykite, kad iš jų galima parinkti du taškus, kuriuos jungiančios atkarpos vidurio taško koordinatės būtų taip pat sveikieji skaičiai. *(4 taškai)*

2. Įrodykite, kad $\angle ACB = \angle DEF$. *(3 taškai)*



3. Išspręskite lygčių sistemą $\begin{cases} x^2 + xy + 2y^2 = 44, \\ 2x^2 - xy + y^2 = 16. \end{cases}$ *(5 taškai)*

4. Parduotuvės savininkas sumokėjo už prekę 220 litų. Kokią jis turi nurodyti kainą, kad parduodamas prekes su 15% reklamine nuolaida turėtų 15% pelno? *(3 taškai)*

5. Trikampio ABC kraštinių ilgiai $AB = 15$, $AC = 14$, $BC = 13$. Iš taško C nubrėžtas statmuo į kraštinę AC iki susikirtimo su kraštinės AB tęsiniu taške K: $AC \perp CK$. Raskite atkarpų BK ir CK ilgius. *(5 taškai)*

XI klasės užduotis

1. Raskite visus natūraliųjų skaičių trejetus (P, K, L), su kuriais $P^2 + K - L = 100$ ir $P + K^2 - L = 124$. *(4 taškai)*

2. Apskritimai, kurių spinduliai lygūs 5 ir 3, susikerta taškuose A ir B; atstumas $AB = 4$. Mažesniojo apskritimo centras yra didesniojo apskritimo išorėje. Taškas C yra mažesniojo apskritimo lanko AB vidurio taškas, priklausantis didesniajam skrituliui. Pustiesės AC ir BC kerta didesnįjį apskritimą taškuose M ir N. Koks yra atkarpos MN ilgis? *(4 taškai)*

3. Apskaičiuokite reikšmę $f(2)$, kai su visais realiaisiais $x \neq 0$ yra teisinga lygybė $2f(x) - 3f(\frac{1}{x}) = x^2$. *(4 taškai)*

4. Išspręskite lygtį $\sin x = \cos(x^2)$. *(4 taškai)*

5. Keliais būdais galima suskirstyti 12 krepšinio komandų į tris grupes po keturias komandas? Kiekviena komanda su kiekviena kita tos grupės komanda žaidžia po dvi rungtynes: namuose ir svetur. Kiek rungtynių bus sužaista kiekvienoje grupėje? *(4 taškai)*

XII klasės užduotis

1. Įrodykite, kad su visais natūraliaisiais $n > 1$ teisinga nelygybė $\log_n(n+1) > \log_{n+1}(n+2)$. *(5 taškai)*

2. Per parabolės $y = x^2 + 10$ tašką $M_0(x_0; y_0)$ nubrėžta liestinė kerta parabolę $y = x^2 - 1$ taškuose $M_1(x_1; y_1)$ ir $M_2(x_2; y_2)$; čia $x_1 < x_2$. Raskite atkarpų M_1M_2 ir M_0M_2 ilgių santykį. *(3 taškai)*

3. Išspręskite lygčių sistemą $\begin{cases} \sqrt{\sin x - \cos y} = \cos x, \\ \sin x + \cos y = \sin^2 x. \end{cases}$ *(3 taškai)*

4. Lėktuvas iš miesto A į miestą B skrenda pusapskritimiu. Miestus jungia tiesus kelias, kurio ilgis $AB = 900$ km. Raskite didžiausią galimą atstumą tarp kelyje esančio stebėtojo ir lėktuvo, kai stebėtojo ir lėktuvo nuotoliai nuo A yra vienodi. *(4 taškai)*

5. Išspręskite lygtį $1 - \frac{x}{2x-3} + \frac{x^2}{(2x-3)^2} - \frac{x^3}{(2x-3)^3} + \cdots = a + 2$. Ištirkite sprendinį. *(5 taškai)*

IX klasės užduoties sprendimai

1. Brolių A, B ir C atitinkamus pinigų išteklius žymime a, b, c ir sudarome trijų lygčių sistemą

$$\begin{cases} a + \frac{5}{8}b = 320\,000, & (1) \\ b + \frac{8}{9}c = 320\,000, & (2) \\ c + \frac{a}{2} + \frac{3}{16}b = 320\,000. & (3) \end{cases}$$

Iš (2) lygties išreiškę $b = 320\,000 - \frac{8}{9}c$, iš (1) gauname $a = 320\,000 - \frac{5}{8}b = 120\,000 + \frac{5}{9}c$. Įrašę gautąsias išraiškas į (3) lygtį, apskaičiuojame $c = 180\,000$; tuomet $a = 220\,000$ ir $b = 160\,000$.

Atsakymas. A turėjo 220 000, B — 160 000 ir C — 180 000 litų.

2. Sakykime, kad $\sqrt{2} + \sqrt[3]{4} > 3$. Tuomet $\sqrt[3]{4} > 3 - \sqrt{2} > 0$. Pakėlę kubu ir sutvarkę, gauname ekvivalenčią nelygybę $29\sqrt{2} > 41$, o ją pakėlę kvadratu, gauname teisingą nelygybę $1682 > 1681$.

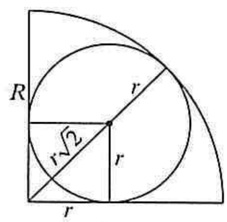
Atsakymas. $\sqrt{2} + \sqrt[3]{4} > 3$.

3. Lygties apibrėžimo sritis yra $x \geqslant 0$. Tuomet $a \geqslant 0$. Kvadratinė lygtis $(\sqrt{x})^2 + \sqrt{x} - a = 0$ turi turėti *vienintelį neneigiamą* sprendinį. Taip bus tada ir tik tada, kai $-1 + \sqrt{1 + 4a} \geqslant 0$, taigi $a \geqslant 0$.

Atsakymas. $a \geqslant 0$.

4. $10 \leqslant N \leqslant 99$. Žymime $N = 10x + y$. Tuomet $S = 10y + x$. Čia $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$; $y = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. $N - S = (10x + y) - (10y + x) = 9(x - y)$. Skirtumo $x - y$ galimos reikšmės yra 0; ± 1; ± 2; ± 3; ± 4; ± 5; ± 6; ± 7; ± 8; 9. Taigi yra 18 galimų skirtumo $N - S$ reikšmių: -72; -63; -54; -45; -36; -27; -18; -9; 0; 9; 18; 27; 36; 45; 54; 63; 72; 81.

5. Pažymėkime didžiojo apskritimo spindulį R, o mažojo — r.
Iš sąlygos $2\pi r = 12(\sqrt{2} - 1)$ gauname $r = \frac{6}{\pi}(\sqrt{2} - 1)$. Iš brėžinio aišku, kad $R = r\sqrt{2} + r = r(\sqrt{2} + 1)$, todėl ieškomasis lanko ilgis $\frac{\pi R}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{6}{\pi}(\sqrt{2} - 1) \cdot (\sqrt{2} + 1) = 3$.

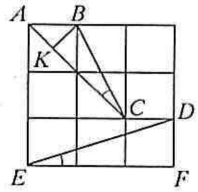


Atsakymas. Skritulio išpjovos lanko ilgis lygus 3.

X klasės užduoties sprendimai

1. Atkarpos, jungiančios taškus $(x_1; y_1)$ ir $(x_2; y_2)$, vidurio taško koordinatės yra $(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2})$. Lyginį skaičių žymime L, nelyginį skaičių žymime N. Bet kuris taškas, kurio koordinatės yra sveikieji skaičiai, priklauso kuriai nors iš keturių grupių: $(L; L)$, $(L; N)$, $(N; L)$ ir $(N; N)$. Jeigu atkarpa jungia du tos pačios grupės taškus, tai jos vidurio taško koordinatės yra sveikieji skaičiai. Kadangi taškai penki, tai remiantis Dirichlė principu bent du iš jų priklauso tai pačiai grupei. Šiuos taškus jungiančios atkarpos vidurio taško koordinatės yra sveikieji skaičiai.

2. Abu kampai — smailieji. Papildome brėžinį, iš taško B nuleidę statmenį į AC: $BK \perp AC$. Stačiųjų trikampių $\triangle BKC$ ir $\triangle EFD$ kampų $\angle KCB$ ir $\angle DEF$ tangentai vienodi: $\operatorname{tg}\angle KCB = \frac{BK}{KC} = \frac{1}{3}$ ir $\operatorname{tg}\angle DEF = \frac{DF}{EF} = \frac{1}{3}$, todėl $\angle ACB = \angle DEF$.



3.

$$-\begin{cases} x^2+xy+2y^2=4\cdot 11 \,\Big|\cdot 4 \\ 2x^2-xy+y^2=4\cdot 4 \,\Big|\cdot 11 \end{cases}$$

$$18x^2-15xy+3y^2=0 \,\Big|: 3x^2$$

$$\frac{y^2}{x^2}-5\frac{y}{x}+6=0; \qquad \frac{y}{x}=2, \quad \frac{y}{x}=3.$$

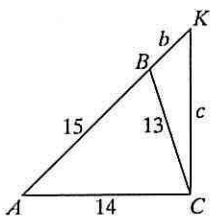
Įrašę į antrą sistemos lygtį $y=2x$ ir išsprendę kvadratinę lygtį $2x^2-2x^2+4x^2=16$, gauname $x_{1,2}=\pm 2$. Tuomet $y_{1,2}=\pm 4$. Įrašę $y=3x$, gauname $2x^2-3x^2+9x^2=16$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{2}$. Tuomet $y_{3,4}=\pm 3\sqrt{2}$.

Atsakymas. $(2;4)$, $(-2;-4)$, $(\sqrt{2};3\sqrt{2})$ ir $(-\sqrt{2};-3\sqrt{2})$.

4. 15% pelno yra $220\cdot 0{,}15=33\,(\mathrm{Lt})$. Ieškomą kainą y Lt randame iš lygties $y\cdot(1-0{,}15)=220+33$, arba $y=\frac{253}{0{,}85}=297{,}647\approx 297{,}65$.

Atsakymas. Turi nurodyti 297,65 Lt kainą.

5. Žymime: $BK=b$; $CK=c$.



Trikampiui AKC taikome kosinusų teoremą:

$$c^2=14^2+(15+b)^2-2\cdot 14\cdot(15+b)\cdot\cos A. \tag{1}$$

Pritaikę kosinusų teoremą trikampiui ABC, gauname $13^2=14^2+15^2-2\cdot 14\cdot 15\cdot\cos A$. Išreiškiame $\cos A=\frac{3}{5}$ ir įrašome į (1) lygybę:

$$c^2=14^2+(15+b)^2-28(15+b)\cdot\frac{3}{5}. \tag{2}$$

Taikome Pitagoro teoremą:

$$c^2=(15+b)^2-14^2. \tag{3}$$

Sulyginę (2) ir (3) lygybių dešiniąsias puses, gauname $14^2+(15+b)^2-28(15+b)\cdot\frac{3}{5}=(15+b)^2-14^2$, iš čia $b=\frac{25}{3}$. Tuomet iš (3) lygybės išplaukia $c=\frac{56}{3}$.

Atsakymas. $BK=\frac{25}{3}$; $CK=\frac{56}{3}$.

XI klasės užduoties sprendimai

1.

$$-\begin{cases} P^2+K-L=100, \\ P+K^2-L=124, \end{cases}$$

$$K^2-P^2-(K-P)=24,$$

$$(K-P)\cdot(K+P-1)=24.$$

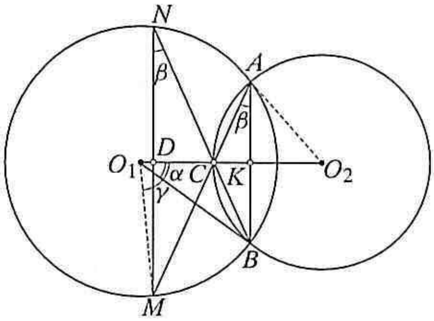
Iš gautosios lygybės aišku, kad $K>P$ ir kad pirmas dauginamasis yra mažesnis už antrąjį. Yra tik keturi atvejai, kai dviejų natūraliųjų skaičių sandauga lygi 24: 1) $1\cdot 24$; 2) $2\cdot 12$; 3) $3\cdot 8$; 4) $4\cdot 6$.

1) Jei $K-P=1$, tai $K-1=P$, ir daugiklis $K+P-1=P+P=2P$ lygus 24, kai $P=12$. Tuomet $K=13$ ir iš abiejų lygybių gauname $L=57$.

2) Jei $K - P = 2$, tai $K - 1 = P + 1$, ir $K + P - 1 = 2P + 1 \neq 12$, kai $P \in N$.
3) Jei $K - P = 3$, tai $K - 1 = P + 2$, ir $K + P - 1 = 2P + 2 = 8$; iš čia $P = 3$. Tuomet $K = 6$, bet nėra natūraliojo skaičiaus L, tenkinančio abi lygybes $3^2 + 6 - L = 100$ ir $3 + 6^2 - L = 124$.
4) Jei $K - P = 4$, tai $K - 1 = P + 3$, ir $K + P - 1 = 2P + 3 \neq 6$, kai $P \in N$.

Atsakymas. Vienintelis natūraliųjų skaičių trejetas (12; 13; 57).

2. Papildome brėžinį, nubrėžę AO_2, BO_1 ir MO_1. Stačiojo trikampio O_1KB: $O_1K = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$; $\sin\alpha = \frac{2}{5}$; $\cos\alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$. Stačiojo trikampio AKO_2: $O_2K = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$; $CK = 3 - \sqrt{5}$. Stačiojo trikampio ACK:



$\angle BO_1O_2 = \alpha$
$\angle MO_1O_2 = \gamma$

$$AC = \sqrt{CK^2 + 2^2} = \sqrt{18 - 6\sqrt{5}},$$

$$\sin\beta = \frac{CK}{AC} = \frac{3 - \sqrt{5}}{\sqrt{6(3 - \sqrt{5})}} = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{6}},$$

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \frac{3 - \sqrt{5}}{6}} = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{6}}$$

ir $\triangle O_1DM$: $MD = \frac{1}{2}MN = 5\sin\gamma$. Kadangi kampai $\angle MO_1B = \gamma - \alpha$ ir $\angle MNB = \beta$ remiasi į $\smile MB$, tai $\gamma - \alpha = 2\beta$, arba $\gamma = \alpha + 2\beta$.
Tuomet

$$\begin{aligned} MN &= 10 \cdot \sin(\alpha + 2\beta) = 10(\sin\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos\alpha \cdot \sin 2\beta) = \\ &= 10 \cdot \left(\sin\alpha \cdot \left(\cos^2\beta - \sin^2\beta\right) + \cos\alpha \cdot 2\sin\beta \cdot \cos\beta\right) = \\ &= 10 \cdot \left(\frac{2}{5}\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{6} - \frac{3 - \sqrt{5}}{6}\right) + \frac{\sqrt{21}}{5} \cdot 2\sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{6}} \cdot \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{6}}\right) = \frac{4}{3}\left(\sqrt{5} + \sqrt{21}\right). \end{aligned}$$

Atsakymas. $MN = \frac{4}{3}(\sqrt{5} + \sqrt{21})$.

3. Įrašę $x = 2$ ir $x = \frac{1}{2}$, gauname sistemą lygčių, kurių atitinkamas puses sudedame:

$$+\begin{cases} 2f(2) - 3f\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \,\Big|\cdot 2, \\ -3f(2) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \,\Big|\cdot 3 \end{cases}$$

$$-5f(2) = 8 + \frac{3}{4}; \qquad f(2) = -\frac{7}{4}.$$

Atsakymas. $f(2) = -\frac{7}{4}$.

4. Lygybė $\sin x = \cos y$ yra teisinga, kai $y = \pm(\frac{\pi}{2} - x) + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Įrašę $y = x^2$, išsprendžiame abi kvadratines lygtis:

$$x^2 \pm x - \left(2\pi k \pm \frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 + 8k\pi - 2\pi}\right), \quad k \in N,$$

$$x_{3,4} = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1 + 8k\pi + 2\pi}\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

5. Dvylika komandų galima suskirstyti į tris grupes po keturias komandas $n_1 = \frac{12!}{4!4!4!} = 34\,650$ būdų. Kiekvienoje grupėje bus sužaista po $n_2 = A_4^2 = 12$ rungtynių.

XII klasės užduoties sprendimai

1. Iš teisingos nelygybės $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ išplaukia: $1 + \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{n+1}$, $\frac{n+1}{n} > \frac{n+2}{n+1}$ ir

$$\log_{n+1} \frac{n+1}{n} > \log_{n+1} \frac{n+2}{n+1}. \tag{1}$$

Kai $n > 1$,

$$\log_n \frac{n+1}{n} > \log_{n+1} \frac{n+1}{n}, \tag{2}$$

todėl iš (1) ir (2) nelygybių išplaukia nelygybė

$$\log_n \frac{n+1}{n} > \log_{n+1} \frac{n+2}{n+1},$$

arba

$$\log_n (n+1) - \log_n n > \log_{n+1}(n+2) - \log_{n+1}(n+1),$$
$$\log_n (n+1) - 1 > \log_{n+1}(n+2) - 1,$$
$$\log_n (n+1) > \log_{n+1}(n+2).$$

Nelygybė įrodyta.

2. Liestinės taške $M_0(x_0; y_0)$ lygtis yra $y - y_0 = 2x_0 \cdot (x - x_0)$; čia $k = y'(x_0) = 2x_0$, o $y_0 = x_0^2 + 10$. Tuomet iš sistemos

$$\begin{cases} y = 2x_0 \cdot x + \left(10 - x_0^2\right), \\ y = x^2 - 1 \end{cases}$$

randame šios liestinės ir kitos parabolės susikirtimo taškų koordinates:

$$x_1 = x_0 - \sqrt{11}, \qquad x_2 = x_0 + \sqrt{11},$$
$$y_1 = \left(x_0 - \sqrt{11}\right)^2 - 1, \qquad y_2 = \left(x_0 + \sqrt{11}\right)^2 - 1.$$

Atstumai:

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = 2\sqrt{11(1 + 4x_0^2)},$$
$$M_0M_2 = \sqrt{(x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2} = \sqrt{11(1 + 4x_0^2)}.$$

Atsakymas. $\frac{M_1M_2}{M_0M_2} = 2.$

3. Lygtis $\sqrt{\sin x - \cos y} = \cos x$ ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} \sin x - \cos y = \cos^2 x, \\ \cos x \geqslant 0, \end{cases}$$

taigi vietoje pradinės sistemos galima spręsti tokią:

$$\begin{cases} \sin x - \cos y = \cos^2 x, \\ \sin x + \cos y = \sin^2 x, \\ \cos x \geqslant 0. \end{cases}$$

Sudėję šios sistemos lygtis, gauname:

$$2 \sin x = 1,$$
$$\sin x = \frac{1}{2}.$$

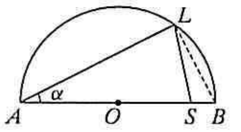
Atėmę atitinkamas sistemos lygčių puses, gauname:

$$-2 \cos y = \cos^2 x - \sin^2 x,$$
$$-2 \cos y = 1 - 2\sin^2 x, \qquad \cos y = -\frac{1}{4}.$$

Iš $\sin x = \frac{1}{2}$ gauname $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, tačiau su nelyginiais k $\cos x < 0$. Taigi mums tinka tik $x_m = (-1)^{2m} \frac{\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbf{Z}$. Iš $\cos y = \frac{1}{4}$ gauname $y = \pm \arccos(-\frac{1}{4}) + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Atsakymas. $(x_m; y_n)$; čia $x_m = \frac{\pi}{6} + 2\pi m$; $y_n = \pm \arccos(-\frac{1}{4}) + 2\pi n$; $m, n \in \mathbf{Z}$.

4. Lėktuvo vietą žymime L, stebėtojo vietą žymime S ir $\alpha = \angle LAS$.



Papildome brėžinį atkarpa LB. Trikampis ALB status, todėl $AL = AB \cdot \cos\alpha$. Naudodamiesi tuo, kad $AL = AS$, trikampiui ALS taikome kosinusų teoremą:

$$LS^2 = AL^2 + AS^2 - 2AL \cdot AS \cdot \cos\alpha = 2AL^2 - 2AL^2\cos\alpha = 2AB^2\cos^2\alpha(1 - \cos\alpha).$$

Ieškosime funkcijos

$$y = \frac{LS^2}{2AB^2} = \cos^2\alpha - \cos^3\alpha$$

maksimalios reikšmės. Išvestinė

$$y' = -2\cos\alpha \cdot \sin\alpha + 3\cos^2\alpha \cdot \sin\alpha = \frac{3}{2}\sin 2\alpha\left(\cos\alpha - \frac{2}{3}\right)$$

lygi nuliui, kai: 1) $\sin\alpha = 0$; 2) $\cos\alpha = 0$; 3) $\cos\alpha_0 = \frac{2}{3}$, $\alpha_0 \in (0; \frac{\pi}{2})$. Taške α_0 išvestinė keičia ženklą iš $+$ į $-$. Pirmieji du atvejai netinka, todėl funkcija y, taip pat ir atstumas LS, didžiausią reikšmę įgyja, kai $\cos\alpha = \frac{2}{3}$. Tuomet $LS^2 = 2 \cdot 900^2 \cdot \frac{4}{9}(1 - \frac{2}{3})$ ir $LS = 200\sqrt{6}$.

Atsakymas. Didžiausias atstumas tarp lėktuvo ir stebėtojo yra $200\sqrt{6}\,\mathrm{km} \approx 490\,\mathrm{km}$.

5. Lygties kairioji pusė turi prasmę tik tada, kai

$$-1 < \frac{-x}{2x-3} < 1.$$

Tada kairioji lygybės pusė reiškia begalinės nykstančios geometrinės progresijos sumą. Spręskime užrašytąją nelygybę:

$$1 - \frac{x}{2x-3} > 0, \qquad \frac{x-3}{2x-3} > 0, \quad \text{kai } x < \frac{3}{2},\ x > 3;$$

$$\frac{-x}{2x-3} - 1 < 0, \qquad \frac{-3x+3}{2x-3} < 0, \quad \text{kai } x < 1,\ x > \frac{3}{2}.$$

Taigi gavome tokius sprendinius: $x < 1$, $x > 3$.
Pritaikę formulę

$$b + bq + bq^2 + \cdots = \frac{b}{1-q},$$

kai $|q| < 1$, su $q = \frac{-x}{2x-3}$ užrašykime lygtį taip:

$$\frac{1}{1 + \frac{x}{2x-3}} = a + 2.$$

Sprendinys $x = \frac{3a+3}{3a+4}$ tinka pradinei lygčiai tik tada, kai $x < 1$, $x > 3$. Išsprendę nelygybes

$$\frac{3a+3}{3a+4} < 1 \quad \text{ir} \quad \frac{3a+3}{3a+4} > 3,$$

gauname: $a > -\frac{4}{3}$, $-\frac{3}{2} < a < -\frac{4}{3}$.

Atsakymas. Lygties sprendinys egzistuoja, kai $a \in (-\frac{3}{2}; -\frac{4}{3}) \cup (-\frac{4}{3}; +\infty)$. Tada $x = \frac{3a+3}{3a+4}$.

2002 METŲ PROF. J. MATULIONIO KONKURSO NUGALĖTOJAI

IX klasė

I vieta
Marijus Kilmanas, KTU gimnazija
Mindaugas Kuprionis, KTU gimnazija

II vieta
Valerija Vojevodina, Visagino „Gerosios vilties" vid. m-kla
Inga Šermokaitė, Vilniaus TGTM licėjus
Simona Lukoševičiūtė, Panevėžio J. Balčikonio gimnazija

III vieta
Vaiva Katinaitė, Utenos A. Šapokos gimnazija
Vytautas Stepanauskas, Vilniaus TGTM licėjus
Stanislavas Surinas, Visagino „Atgimimo" gimnazija
Jurgita Šagždavičiūtė, Raseinių Šaltinio vid. m-kla

X klasė

I vieta
Vladimiras Petrenko, Visagino Sedulinos vid. m-kla

II vieta
Antanas Šavinis, Širvintų r. Musninkų vid. m-kla
Milda Juronytė, KTU gimnazija

III vieta
Vygantas Butkus, Šiaulių Didždvario gimnazija
Dainius Dzindzalieta, Šiaulių S. Šalkauskio vid. m-kla
Lina Malinauskaitė, Utenos A. Šapokos gimnazija
Paulius Šarka, Kretingos J. Pabrėžos gimnazija

XI klasė

I vieta
Žymantas Darbėnas, KTU gimnazija

II vieta
Justas Bujokas, Vilniaus TGTM licėjus
Viktoras Novičenko, Zarasų „Ąžuolo" gimnazija

III vieta
Giedrius Žilakauskis, Panevėžio J. Balčikonio gimnazija

XII klasė

I vieta
Aivaras Novikas, Vilniaus TGTM licėjus
Julius Taulavičius, Mažeikių „Gabijos" gimnazija

II vieta
Narūnas Vaškevičius, KTU gimnazija

III vieta
Marius Zrelskis, Kauno „Varpo" gimnazija