$\alpha + \omega$, 2002, Nr. 1, 78–81

Iš Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos gyvenimo

A. Apynis (VU), E. Stankus (VU), J. Šinkūnas (VPU)
antanas.apynis@maf.vu.lt, eugenijus.stankus@maf.vu.lt,
sinkunas@vpu.lt

Straipsnyje aptariama Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos veikla, pateikiamos žurnale dar neskelbtos užduotys.

Šiemet, įvykdę 2000–2002 metų Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos mokymo programą, į baigiamąjį konkursą susirinko 325 moksleiviai. Šios laidos absolventai turėjo galimybę išsamiau susipažinti su tokiomis temomis:

- skaičių dalumas (parengė doc. E. Stankus);
- vidurkiai — aritmetinis, geometrinis, harmoninis ir kt. (parengė mokyt. ekspertas V. Vitkus);
- grandininės trupmenos (parengė doc. R. Skrabutėnas);
- figūrų plotai (parengė doc. J. Šinkūnas);
- vektoriai (parengė doc. E. Mazėtis);
- iracionaliosios lygtys ir nelygybės (parengė mokyt. metodininkė S. Staknienė);
- trigonometrinės lygtys ir nelygybės (parengė doc. A. Apynis ir doc. E. Stankus);
- sekos (parengė doc. G. Stepanauskas).

Temų sąrašas, kaip matome, tradiciškai sudarytas iš įvairių matematikos skyrių, tarp jų ir tokių, kurie nepatenka į mokyklinę matematikos programą. Tai pasakytina apie skaičių teorijos temas — grandinines trupmenas bei skaičių dalumą ir iš dalies apie sekas. Ko gero, labiausiai nutolusios nuo mokyklos programos yra „grandininės trupmenos", tačiau mokiniams ši tema buvo gana įdomi ir pakankamai aiški. Apskritai skaičių teorijos tematika yra gana populiari įvairiuose konkursuose bei olimpiadose. Todėl manome, kad ir toliau šių temų neturėtume vengti. Be to, skaičių teorijos uždaviniai visada žavi savo paprastomis formuluotėmis ir dažniausiai nelengvais sprendimais.

Į baigiamąjį uždavinių sprendimo konkursą balandžio 20 d. susirinkę moksleiviai turėjo išspręsti 5 uždavinius.

Sėkmingai įveikusiems ir šį etapą buvo įteikti Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos baigimo pažymėjimai. Šiemet juos gavo 301 moksleivis. Mūsų mokyklą per trejus metus jau yra baigę apie 700 mokinių.

Dabar LJMM pirmame kurse mokosi apie 800 moksleivių. Jiems liko išstudijuoti dar keturias temas (optimizavimo uždaviniai, kombinatorika, atsitiktiniai dydžiai, kompleksiniai skaičiai) ir parašyti baigiamąjį darbą Vilniaus universitete. Atkreipiame dėmesį, kad šiemet buvo patikslinti LJMM baigimo reikalavimai. Mokyklos taryba nutarė:

> LJMM baigimo pažymėjimai įteikiami tik tiems klausytojams, kuriems įskaitytos ne mažiau kaip 6 užduotys ir kurie sėkmingai išsprendė baigiamąją užduotį Vilniaus universitete. Užduotis įskaitoma, jeigu ji atlikta savarankiškai ir įvertinta ne mažiau kaip 5 balais.

Žurnale „Alfa plius omega" dar neskelbtos mūsų mokyklos užduotys:

II kursas

Septintoji 2000–2002 m. m. užduotis. Trigonometrinės lygtys ir nelygybės

Parengė VU docentai A. Apynis ir E. Stankus

Išspręskite šias trigonometrines lygtis:

1. $3\sin^2 2x + 7\cos 2x = 3$;

2. $\sin 4x \cdot \cos x \cdot \operatorname{tg} 2x = 0$;

3. $\frac{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}{\cos^2 x - \cos x} = 0$;

4. $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1+\cos 2x$;
5. $\sin\left(\frac{3\pi}{5}+x\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{5}-\frac{x}{2}\right)$.

Išspręskite šias trigonometrines nelygybes:

6. $|\sin x|>|\cos x|$;
7. $4\cos x-\sin 2x>0$;
8. $\sqrt{2\sin x}<1$;
9. $\cos^2 x+\sin x\cos x\geqslant 1$;
10. $|\sin x|\cos x>\frac{1}{4}$.

II kursas
Aštuntoji 2000–2002 m. m. užduotis. Sekos

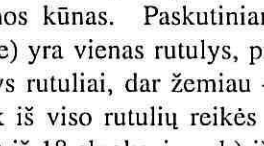
Parengė VU docentas G. Stepanauskas

1. Sugalvokite bent dvi skirtingas sekas (užrašykite bendrojo sekos nario formules), kurių pirmieji trys nariai yra 1, 3, 7.
2. Tegul sekos $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ nariai tenkina rekurentųjį sąryšį
$$a_n=a_{n-1}+2a_{n-2}+a_{n-3}, \quad n=4,5,\ldots.$$
Be to, tegul $a_3=1$, $a_5=1$, $a_6=0$. Raskite pirmąjį sekos narį a_1.
3. Įrodykite, kad seka, kurios bendrasis narys
$$a_n=\frac{2n+3}{6n-5},$$
yra monotoniškai mažėjanti.
4. Kokią sąlygą turi tenkinti teigiami skaičiai a, b, c ir d, kad seka, kurios bendrasis narys yra
$$a_n=\frac{an+b}{cn+d},$$
būtų monotoniškai didėjanti?
5. Sekos pirmųjų n narių suma užrašoma formule $S_n=2n^2+3n$, teisinga visiems $n\geqslant 1$.
a) Raskite dešimtąjį šios sekos narį.
b) Įrodykite, kad ši seka yra aritmetinė progresija.
6. Kokia turi būti x reikšmė, kad skaičių trejetas $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[4]{x}$:
a) sudarytų aritmetinę progresiją;
b) sudarytų geometrinę progresiją;
c) sudarytų kartu ir aritmetinę, ir geometrinę progresiją?
7. Lygiašonio trikampio ABC ($AC=BC$) kampas prie pagrindo $\angle ABC=75°$, o šoninė kraštinė $AC=a$. Kraštinėje BC pažymėti taškai D_1, D_3, $D_5, \ldots, D_{2n-1}, \ldots$, o kraštinėje AC taškai D_2, D_4, $D_6, \ldots, D_{2n}, \ldots$ taip, kad atkarpos AD_1, D_2D_3, D_4D_5, $D_{2n-2}D_{2n-1}, \ldots$ yra statmenos kraštinei BC, o atkarpos D_1D_2, D_3D_4, $D_5D_6, \ldots, D_{2n-1}D_{2n}, \ldots$ yra statmenos kraštinei AC. Raskite:
a) laužtės $AD_1D_2D_3$ ilgį;
b) laužtės $AD_1D_2...D_n$ ilgį;
c) begalinės laužtės $AD_1D_2\ldots D_n\ldots$ ilgį.
8. Ar galima iš skaičių
$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$$
išrinkti tokius, kurie sudarytų begalinę geometrinę progresiją, kurios suma būtų lygi:
a) $\frac{1}{5}$; b) $\frac{1}{15}$.
9. Raskite sumą $4+14+36+\cdots+n(n^2+3)$.
10. Rutuliai dedami sluoksniais vieni ant kitų taip, kad gaunamas taisyklingos trikampės piramidės formos kūnas. Paskutiniame sluoksnyje (viršūnėje) yra vienas rutulys, priešpaskutiniame — trys rutuliai, dar žemiau — 6 rutuliai ir t. t. Kiek iš viso rutulių reikės pastatyti piramidei: a) iš 18 sluoksnių; b) iš n sluoksnių?

I kursas
Antroji 2000–2002 m. m. užduotis.
Antrosios eilės kreivės

Parengė VU docentas P. Vaškas

1. Įrodykite (taikydami lygiagrečiojo projektavimo savybes), kad elipsės lygiagrečiųjų stygų vidurio taškai yra vienoje tiesėje.
2. Ar liestinės elipsės skersmens galuose yra lygiagrečios?
3. Nubrėžta elipsė. Raskite jos centrą.
4. Kodėl toks paveikslas (žr. pav.) yra klaidingas apskritojo kūgio ir jo ašinio pjūvio atvaizdas?



Apskritąjį kūgį ir jo ašinį pjūvį pavaizduokite teisingai.

5. Pavaizduokite apskritimo ir į jį įbrėžto bei apie jį apibrėžto trikampio lygiagrečiąją projekciją.

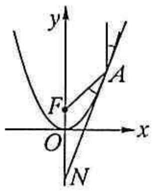
6. Pavaizduokite apskritimo ir į jį įbrėžto bei apie jį apibrėžto kvadrato lygiagrečiąją projekciją.

7. Įrodykite (nagrinėdami atitinkamą lygčių sistemą), kad parabolės lygiagrečiųjų stygų vidurio taškai yra vienoje tiesėje. Ką galite pasakyti apie tas tieses, kai vienos stygos pakeičiamos kitomis?

8. Nubrėžta parabolė. Nubrėžkite jos simetrijos ašį.

9. Sudarykite parabolės $y = ax^2$ liestinės jos taške $M(x_0; y_0)$ lygtį.

10. Taškas $F(0; \frac{1}{4a})$ vadinamas parabolės $y = ax^2$ židiniu. Įrodykite, kad parabolės liestinė bet kuriame taške sudaro lygius kampus su spinduliu, nutiestu iš to taško į židinį, ir su parabolės simetrijos ašimi (paveiksle tie kampai pažymėti lankeliais).



Nurodymas. Išnagrinėkite trikampį AFN.

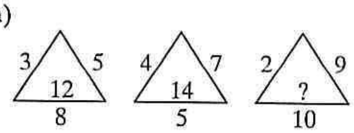
Pastaba. Ši savybė dar vadinama parabolės optine savybe: jei parabolės židinyje yra šviesos šaltinis, tai nuo parabolės atsispindėję spinduliai yra lygiagretūs su parabolės simetrijos ašimi, t. y. sudaro lygiagrečiųjų spindulių pluoštą. Ta savybe pasinaudojama gaminant prožektorius, žibintus.

I kursas
Trečioji 2000–2002 m. m. užduotis. Matematinės logikos elementai

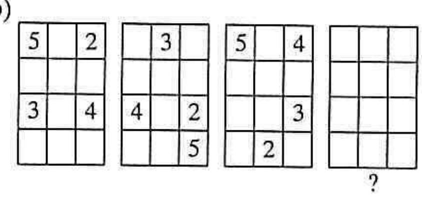
Parengė VPU docentė L. Maliaukienė

1. Nustatykite dėsningumą ir juo remdamiesi į klaustuku pažymėtas vietas įrašykite: a) skaičių; b) skaičius 2, 3, 4, 5 atitinkamuose langeliuose.

a)



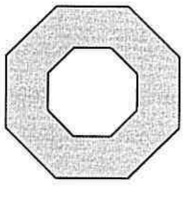
b)



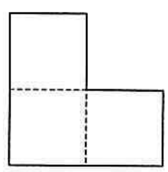
2. Kaip sustatyti prie kambario sienų:
a) 3 kėdes, kad prie kiekvienos sienos būtų po kėdę;
b) 4 kėdes, kad prie kiekvienos sienos stovėtų po dvi kėdes;
c) 7 kėdes, kad prie kiekvienos sienos jų būtų po lygiai?

3. Turtuolis surinko 11 senų prabangių automobilių kolekciją, kurią testamentu paliko trims sūnums, nurodęs pasidalyti jas taip: pusę automobilių turi gauti vyriausias sūnus, ketvirtį — vidurinysis ir vieną šeštąją — jauniausias. Kaip broliams pasidalyti automobilius?

4. a) Taisyklingąjį aštuonkampį su taisyklinga aštuonkampe skyle padaliję į 8 lygias dalis, sudarykite aštuonkampę žvaigždę su taisyklinga aštuonkampe skyle.



b) Iš paveiksle pavaizduotos figūros (kurią sudaro 3 lygūs kvadratai), dalydami ją į dvi dalis, sudarykite kvadratą su anga, lygia vienam figūros kvadratui.



5. Teisme apklausiami trys žmonės, iš kurių kiekvienas yra arba čiabuvis, arba kolonistas. Čiabuviai visada teisingai atsako į klausimus, o kolonistai visada meluoja. Teisėjas klausia pirmojo, bet nesupranta jo atsakymo. Todėl jis teiraujasi antrojo, po to – trečiojo apie tai, ką pasakė pirmasis. Antrasis sako, kad pirmasis prisipažinęs esąs čiabuvis. Trečiasis teigia, kad pirmasis prisistatęs kolonistu. Kas buvo antrasis ir trečiasis liudytojai?

6. Paprašykite kurį nors savo draugą, jums nematant, užrašyti piniginės kupiūros numerį (ar bet kokį daugiaženklį skaičių), po to bet kaip perstatyti skaičius ir iš didesniojo atimti mažesnįjį. Iš gauto skirtumo išbraukti bet kurį, nelygų nuliui skaitmenį, o likusius (bet kuria tvarka) pasakyti jums. Jūs lengvai atspėsite užbrauktą skaitmenį. (Lieka tik išsiaiškinti, kaip tai padaryti.)

7. Penki draugai turi po vieną sūnų. Kiekvienas sūnus pasiskolino po knygą iš vieno savo tėvo draugų. Visų šių draugų pavardės panašios į profesijų pavadinimus, bet nė vieno iš jų pavardė neprimena jo paties profesijos. Kalvio sūnus paėmė Kalvelio knygą; jo pavardė primena Kalvelio sūnaus profesiją, be to, jis bendrapavardis su tuo, kieno knygą paėmė Kalvelio sūnus. Žinoma, kad dailidės pavardė ne Puodžiūnas ir kad dailidė paėmė knygą iš Šikšniaus. Kokia stikliaus pavardė? (Pagal seną tradiciją sūnus paveldi savo tėvo profesiją.)

8. Vienoje saloje veikė toks įstatymas: kiekvieną, einantį tiltu į salą, teisėjai klausdavo, kur ir ko jis eina. Tuos, kurie pasakydavo tiesą, teisėjai praleisdavo, o tuos, kurie sumeluodavo, siųsdavo į kartuves. Kartą vienas keliauninkas prisiekė, jog eina tam, kad jį pakartų. Teisėjai sutriko. Kodėl?

9. Nustatykite, ar teiginys

$$[(A\&B) \supset C] \sim [\neg(A \supset B)\&(C \vee \neg B)]$$

yra tautologija, ar prieštara, ar išpildomas.

10. Geležinkelio stotyje nustatyta tokia tvarka: jeigu iš stoties išvažiuoja traukiniai A ir B, tai turi išvykti ir traukinys C. Jei išvyksta traukiniai B ir C, tai išvyksta ir traukinys A. Nustatykite, ar esant šiai tvarkai galimas atvejis, kai, išvykstant traukiniams A ir C, traukinys B neišvyksta? Spręsdami uždavinį, pasinaudokite teiginių logika.

Lietuvos jaunųjų matematikų baigiamojo uždavinių sprendimo konkurso, įvykusio 2002 m. balandžio 20 d., nugalėtojai

Vilmantas Augutis, Utenos A. Šapokos gimnazija
Raimundas Lencevičius, Kazlų Rūdos K. Griniaus gimnazija
Sigitas Mačiulis, Rokiškio J. Tūbelio gimnazija
Inga Mockutė, Klaipėdos „Vėtrungės“ gimnazija
Viktoras Novičenko, Zarasų „Ąžuolo“ gimnazija
Aivaras Novikas, Vilniaus TGTM licėjus
Simona Sadzevičiūtė, Panevėžio J. Balčikonio gimnazija
Justas Sperauskas, Mažeikių „Gabijos“ gimnazija
Vytenis Šakėnas, Utenos A. Šapokos gimnazija
Nijolė Valinskytė, Plungės „Saulės“ gimnazija
Olga Vorobjova, Vilniaus Naujamiesčio vid. m-kla