$\alpha + \omega$, 2002, Nr. 1, 75–77

# *Kodėl* cos 17° *iracionalus?*

Juozas Mačys
jmacys@ktl.mii.lt

*Straipsnyje atsakoma į daug bendresnį nei antraštės klausimą. Įrodoma, kad* $\cos n°$, *kai* $n$ *— natūralusis skaičius, yra visada iracionalusis skaičius, išskyrus tuos atvejus, kai* $\cos n°$ *lygus* $0$, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm 1$.

Žinome (ar esame žinynuose matę) nemažai trigonometrinių funkcijų reikšmių — ir dažniausiai jos iracionalios. Pavyzdžiui, žinome, kada kosinusas lygus $0$, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm 1$, o štai daugiau racionaliųjų reikšmių ir nepamename.

O gal jų ir nebūna? Kodėl gi — būna. Pavyzdžiui, nesunku užrašyti kampą, kurio kosinusas yra $\frac{1}{7}$ — tai, pavyzdžiui, $\arccos\frac{1}{7}$. Kitaip sakant, mes turime patikslinti klausimą: ar gali $\cos\alpha°$, kai $\alpha$ racionalusis skaičius, būti racionalus (ir nelygus $0$, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm 1$)?

Apsiribokime lengvesniu klausimu: ar gali $\cos n°$, kai $n$ yra natūralusis skaičius, būti racionalus (ir nelygus $0$, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm 1$)?

Vienas būdas būtų toks: apskaičiuoti visas reikšmes ir pasižiūrėti, ką gauname. Žinome 30° ir 45° trigonometrinių funkcijų reikšmes, taigi nesunkiai randame ir $15° = 45° - 30°$ reikšmes — užtenka pasinaudoti skirtumo formulėmis. Bet dabar visi „žinomi" kampai dalijasi iš 15 ir vilties kombinuojant juos gauti dar ką nors — nebėra.

Beje, nusiminti dar anksti — galima apskaičiuoti 18° kampo trigonometrines funkcijas.

Rašome lygybę $\cos 54° = \sin 36°$. Kairėje galima taikyti trigubo kampo kosinuso formulę, bet galima apsieiti ir be jos:

$$\cos 54° + \cos 18° = 2\sin 18° \cos 18° + \cos 18°,$$
$$2\cos 36° \cos 18° = 2\sin 18° \cos 18° + \cos 18°,$$
$$2\cos 36° = 2\sin 18° + 1,$$
$$2(1 - 2\sin^2 18°) = 2\sin 18° + 1,$$
$$4\sin^2 18° + 2\sin 18° - 1 = 0,$$
$$\left(2\sin 18° + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}.$$

Kadangi $\sin 18° > 0$, tai

$$2\sin 18° + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad \sin 18° = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

Dabar galima apskaičiuoti $\cos 18° = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$, po to ir kampo $3° = 18° - 15°$ funkcijas, tada ir visų 3° kartotinių kampų funkcijų reikšmes.

Dabar visų nagrinėjamų kampų laipsnių skaičiai dalijasi iš 3, ir vėl įstrigome. Žinoma, galima būtų išreikšti $\cos 3°$ per $\cos 1°$. Kadangi $\cos 3°$ jau turime, tai išsprendę gautą kubinę lygtį rastume $\cos 1°$. Bet kubines lygtis spręsti sunku ir neįdomu, o čia dar $\cos 3°$ baisokas. Pasielkime kitaip. Remkimės lygybe $\cos 60° = \frac{1}{2}$. Tada

$$\cos 60° + \cos 20° = \frac{1}{2} + \cos 20°,$$
$$2\cos 40° \cos 20° = \frac{1}{2} + \cos 20°,$$
$$4\left(2\cos^2 20° - 1\right)\cos 20° = 1 + 2\cos 20°,$$
$$8\cos^3 20° - 6\cos 20° - 1 = 0.$$

Gavome kubinę $\cos 20°$ atžvilgiu lygtį su sveikaisiais koeficientais. Žinome, jeigu algebrinė lygtis su sveikaisiais koeficientais turi racionalią šaknį $\frac{p}{q}$, tai $q$ yra pirmojo koeficiento daliklis, o $p$ — laisvojo nario daliklis. Taigi lygties $8x^3 - 6x - 1 = 0$ racionaliosios šaknys galėtų būti tik iš aibės $\{\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}\}$, bet lengva įsitikinti, kad nė viena iš tų reikšmių netinka. Mūsų atveju dar paprasčiau. Kadangi $\cos 60° < \cos 20° < \cos 0°$, $\frac{1}{2} < \cos 20° < 1$, tai $\cos 20°$ racionaliosios reikšmės įgyti negali.

Apskritai šią lygtį galima išspręsti kubiniais ir kvadratiniais radikalais, bet vargu ar tai įdomu. Maža to, neįmanoma apsieiti be kompleksinių skaičių. O šiaip jau — išsprendę rastume $20°$ funkcijas, o tada ir kampo $2° = 20° - 18°$ funkcijas, pagaliau kampo $1° = 2° : 2$ funkcijas. Apskaičiavę visų „sveikalaipsnių" kampų funkcijas iki $45°$, įsitikintume, kad trigonometrinių funkcijų kitų racionaliųjų reikšmių negauname. Tada iš redukcijos formulių išplaukia, kad tai teisinga ir su visais sveikaisiais $n$.

Kėlėme sau uždavinį įrodyti, kad $\cos n°$ racionaliųjų reikšmių (išskyrus minėtas) neįgyja, bet to faktiškai dar nepadarėme. Tiesa, šis tas buvo padaryta: nors ir neapskaičiavome $\cos 20°$, bet įrodėme, jog jis iracionalus.

Dabar, pavyzdžiui, nesunku įrodyti, kad ir $\cos 10°$ iracionalus. Remiantis dvigubo kampo kosinuso formule,

$$\cos 20° = 2\cos^2 10° - 1,$$

todėl $\cos 10°$ tikrai iracionalus. Tarkime priešingai — kad $\cos 10°$ racionalus. Tada dešinioji lygybės pusė racionali. Bet tada ir kairioji lygybės pusė — $\cos 20°$ racionali. Prieštara.

Iš šio įrodymo visiškai aišku: jei dvigubo kampo kosinusas iracionalus, tai ir viengubo kampo kosinusas iracionalus.

Apskritai, jeigu kartotinio kampo kosinusas iracionalus, tai ir viengubo kampo kosinusas iracionalus (pavyzdžiui, $\cos 30°$ iracionalus, todėl ir $\cos 1°$ ar $\cos 6°$ iracionalūs). Tai įrodyti nesunku pasirėmus tokiu pagalbiniu teiginiu.

**Lema.** *Kartotinio kampo kosinusas* $\cos n\alpha$ *racionaliai išreiškiamas viengubo kampo kosinusu* $\cos\alpha$.

*Įrodymas.* Iš pradžių — viskas paprasta:

kai $n = 1$, tai $\cos\alpha = \cos\alpha$,
kai $n = 2$, tai $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$,
kai $n = 3$, tai $\cos 3\alpha = \cos 3\alpha + \cos\alpha - \cos\alpha = 2\cos 2\alpha\cos\alpha - \cos\alpha$. Kadangi $\cos 2\alpha$ išreiškiamas $\cos\alpha$, tai ir $\cos 3\alpha$ išreiškiamas $\cos\alpha$. Ir apskritai (matematinė indukcija!)

$$\begin{aligned}\cos(n+2)\alpha &= \cos(n+2)\alpha + \cos n\alpha - \cos n\alpha \\ &= 2\cos(n+1)\alpha\cos\alpha - \cos n\alpha.\end{aligned}$$

Vadinasi, nuosekliai galima bet kurį kartotinio kampo kosinusą išreikšti viengubo kampo kosinusu. ■

**Teorema.** *Jeigu* $\cos n\alpha$ *iracionalus, tai ir* $\cos\alpha$ *iracionalus.*

*Įrodymas.* Tarkime priešingai — kad $\cos\alpha$ racionalus. Tada pagal lemą $\cos n\alpha$ taip pat racionalus. Prieštara. ■

Dabar jau mes pasiruošę įrodyti, kad $\cos n°$ iracionalus (išskyrus atvejus, kai jis įgyja reikšmes $0$, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm 1$).

Kadangi $\cos 20°$, $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ir $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ iracionalūs, tai remiantis teorema iracionalūs yra $\cos 1°$, $\cos 2°$, $\cos 3°$, $\cos 4°$, $\cos 5°$, $\cos 6°$, $\cos 9°$, $\cos 10°$, $\cos 15°$.

Kadangi $\cos 72° = \sin 18°$ iracionalus, tai iracionalūs taip pat ir $\cos 8°$, $\cos 12°$, $\cos 18°$, $\cos 24°$, $\cos 36°$. (Beje, nebūtinai reikėjo ieškoti konkrečios $\sin 18°$ reikšmės — užteko įsitikinti, kad ji iracionali. Tai įrodoma lygiai taip pat, kaip ir $\cos 20°$ atveju, nes $\sin 18°$ tenkina anksčiau gautą lygtį $4\sin^2 18° + 2\sin 18° - 1 = 0$.)

Peržiūrėkime likusias reikšmes. Pirma nepatikrinta reikšmė yra $\cos 7°$. Padauginę $7°$ iš 26, gauname $182°$. Kadangi $\cos 182° = -\cos 2°$ iracionalus, tai iracionalus ir $\cos 7°$.

Toliau eina $\cos 11°$. Kadangi $11° \cdot 17 = 187°$, o $\cos 187° = -\cos 7°$ iracionalus, tai $\cos 11°$ iracionalus.

Kadangi $14 \cdot 13° = 182°$, o $\cos 182° = -\cos 2°$ iracionalus, tai $\cos 13°$ iracionalus.

Iracionalus $\cos 14°$, nes iracionalus $\cos 13 \cdot 14° = \cos 182°$.

Iracionalus $\cos 16°$, nes $16 \cdot 11 = 176 = 180 - 4$.

Iracionalūs $\cos 17°$ ir $\cos 19°$, nes $17 \cdot 10 = 180 - 10$, $19 \cdot 10 = 180 + 10$.

Toliau, iracionalus $\cos n°$, kai $21 \leqslant n \leqslant 25$, nes $168 \leqslant 8n \leqslant 200$, $|8n - 180| \leqslant 20$, o reikšmės iki 20 jau patikrintos.

Iracionalus $\cos n°$, kai $26 \leqslant n \leqslant 29$, nes $156 \leqslant 6n \leqslant 174$, ir $6 \leqslant |6n - 180| \leqslant 24$.

Iracionalus $\cos n°$, kai $31 \leqslant n \leqslant 35$, nes $186 \leqslant 6n \leqslant 210$, o reikšmės nuo 6 iki 30 jau patikrintos.

Iracionalus $\cos n°$, kai $37 \leqslant n \leqslant 43$, nes $185 \leqslant 5n \leqslant 215$.

Iracionalus $\cos 44°$, nes $44 \cdot 4 = 176$, o $\cos 176° = -\cos 4°$ iracionalus.

Iracionalus $\cos n°$, kai $46 \leqslant n \leqslant 55$, nes $184 \leqslant 4n \leqslant 220$.

Iracionalus $\cos n°$, kai $56 \leqslant n \leqslant 59$, nes $168 \leqslant 3n \leqslant 177$.

Iracionalus $\cos n°$, kai $61 \leqslant n \leqslant 89$, nes $122 \leqslant 2n \leqslant 178$.

Remiantis redukcijos formulėmis, ir su visais kitais sveikaisiais $n$ racionalios gali būti tik nurodytos kosinuso reikšmės 0, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm 1$. Tos pačios redukcijos formulės įrodo, kad toks teiginys teisingas ir sinusui.

Dabar nebesunku įrodyti, kad ir $\operatorname{tg} n°$ gali įgyti racionalias reikšmes tik 0 ir $\pm 1$. Kadangi $\operatorname{tg}^2 n° = \frac{1}{\cos^2 n°} - 1 = \frac{2}{1+\cos 2n°} - 1$, tai $\operatorname{tg}^2 n°$ galėtų būti racionalus tik kai $\cos 2n° = 0, \pm\frac{1}{2}, 1$.

Iš tikrųjų, kai $\cos 2n° = 0$, tai $\operatorname{tg}^2 n° = 1$; kai $\cos 2n° = -\frac{1}{2}$, tai $\operatorname{tg}^2 n° = 3$; kai $\cos 2n° = \frac{1}{2}$, tai $\operatorname{tg}^2 n° = \frac{1}{3}$; kai $\cos 2n° = 1$, tai $\operatorname{tg}^2 n° = 0$.

Kadangi $\operatorname{tg}^2 n°$ iracionalus, tai $\operatorname{tg} n°$ tikrai iracionalus. Vadinasi, $\operatorname{tg} n°$ iš racionaliųjų reikšmių gali įgyti tik 0 ir $\pm 1$.

Beje, įrodėme šiek tiek daugiau: $\operatorname{tg}^2 n°$ visada iracionalus, išskyrus reikšmes 0, $\frac{1}{3}$, 1, 3. Iš tos pačios lygybės išplaukia, kad $\cos^2 n°$ (taigi ir $\sin^2 n° = 1 - \cos^2 n°$) racionaliosios reikšmės yra tik 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 1.

Pasirodo, ne tik $\cos n°$, bet ir $\cos\frac{180°}{q}$ ar netgi $\cos\frac{p°}{q}$ ($p$ ir $q$ — sveikieji) taip pat negali įgyti kitų racionaliųjų reikšmių, išskyrus išvardytas. Bet tai jau gilesnė tema.

Dabar grįžkime prie straipsnio pavadinimo. Žinoma, skaičius 17 į jį pateko beveik atsitiktinai. O štai įrodyti, kad $\cos 17°$ iracionalus, dabar mums užtenka kelių žodžių:

kartotinio kampo kosinusas $\cos 30 \cdot 17° = \cos(540° - 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ iracionalus, todėl ir viengubo kampo kosinusas $\cos 17°$ iracionalus.

Teiginio, kad $\cos n°$ iracionalus, įrodymą taip pat galima sutrumpinti. Žinome, kad $\cos 60°$ racionalus, o $\cos 45°$ ir $\cos 20°$ — iracionalūs. Kadangi $\cos 160° = -\cos 20°$ iracionalus, tai iracionalūs yra ir $\cos 40°$ bei $\cos 80°$. Iš likusių penketo kartotinių (nuo 5 iki 85) dalijasi skaičius $N = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$, o kadangi skaičiaus $N$ dalybos iš 180 liekana yra 150, tai $\cos N°$ iracionalus. Todėl iracionalūs ir $N$ daliklių kosinusai.

Iš penketo nekartotinių nuo 1 iki 89 dalijasi skaičius

$$M = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot \\ \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 47 \cdot 53 \cdot 59 \cdot 61 \cdot 71 \cdot 73 \cdot \\ \cdot 79 \cdot 83 \cdot 89.$$

Dalijant iš 180 skaičių $M$, gaunama liekana 72 (tuo nesunku įsitikinti dauginant ne pačius skaičius, o jų dalybos iš 180 liekanas, pavyzdžiui, vietoje $2^8 \cdot 3^4 = 36 \cdot 2^6 \cdot 3^2 = 36(30+2)(10-1)$ galima imti $36 \cdot 2(10 - 1)$, tada $72 \cdot (-1) = -72$ ir t. t.). Kadangi $\cos 72°$ iracionalus, tai ir $\cos M°$ iracionalus, taip pat iracionalūs visų $M$ daliklių kosinusai.