$\alpha + \omega$, 2002, Nr. 1, 74

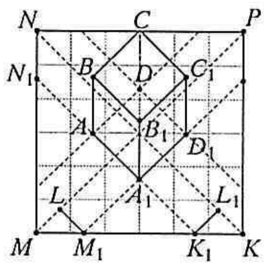
Vieno grakštaus uždavinio negrakštus sprendimas

Jonas Kubilius

Žurnale „Alfa plius omega" (2001, Nr. 3, p. 62) suformuluotas ir išspręstas vienas uždavinys. Vilniaus TGTM licėjaus moksleivis Jonas Kubilius siūlo pabandyti išspręsti jį dar kartą.

Sąlyga. Ar galima kubą $1 \times 1 \times 1$ suvynioti į kvadratinį 3×3 popieriaus lapą?

Atsakymas. Galima.



Sprendimas. Truputį pabandžius suvynioti kubą į tokį popieriaus lapą, gali ir nepavykti. Matyt, bandėte vynioti tradiciškai — suskirstėte popieriaus lapą gražiais langeliais (mat ir uždavinį patogu spręsti tokiame matematikos sąsiuvinyje) ir kubą dėjote tiesiai į vieną langelį. Pastebėję, kad taip nieko neišeis (tai lengva įrodyti), imkimės kitos taktikos: pasukime kubą, kad jis „nebetupėtų" tvarkingai viename langelyje (paveiksle $NPKM$ yra 3×3 popieriaus lapas, o ADD_1A_1 — apatinis kubo pagrindas; nors brėžinys netikroviškas, juo patogu naudotis). Šis būdas teikia vilčių, todėl verta pabandyti apskaičiuoti ir sužinoti, ar išties taktika pasiteisino.

Dėl paprastumo tarkime, kad bet kuri kubo briauna su popieriaus lapo kraštine sudaro 45° kampą, o pats kubas yra lapo centre. Popierių, aišku, lenkime taip, kad būtų uždengtas visas kubo paviršius. Tada turime įrodyti du dalykus: kad laužtės $ABCDA$ ilgis P_{ABCDA} yra ne didesnis už atkarpos MP ilgį ir kad atkarpa A_1B_1 yra ne ilgesnė už atkarpą A_1K_1. Akivaizdu, jei šie du teiginiai yra teisingi, tai popieriaus lapas apgobs kubo paviršių.

1. Įrodykime, kad $P_{ABCDA} \leqslant MP$. Remiantis Pitagoro teorema:

$$MP = \sqrt{MN^2 + NP^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2} \geqslant 4 = AB + BC + CD + DA = P_{ABCDA}.$$

   Įrodyta.

2. Dabar įrodykime, kad $A_1B_1 \leqslant A_1K_1$. Nubrėžkime atkarpą K_1L_1, statmeną NK. Trikampis K_1L_1K yra lygiašonis ir statusis, $K_1L_1 = L_1K = \frac{1}{2}$. Taigi $N_1K_1 = NK - 2 \cdot L_1K = 3\sqrt{2} - 1$. Tada $A_1K_1 = \frac{1}{2}(N_1K_1 - 1) = \frac{1}{2}(3\sqrt{2} - 2)$. Kadangi $A_1B_1 = 1$, tai reikia įrodyti, kad $\frac{1}{2}(3\sqrt{2} - 2) > 1$, arba $3\sqrt{2} > 4$. Tačiau šią nelygybę jau įrodėme! Vadinasi, ir uždavinys išspręstas.

Aišku, galimų sprendimų yra be galo daug, bet įrodyti, kad šis atvejis tinkamas, manau, lengviausia. Galbūt skaitytojas sugalvos dar kokį nors būdą suvynioti kubą, o gal atras nelygybę, ribojančią kubo padėtį lape, kai dar jį galima suvynioti.

P.S. Dėkoju Pauliui Šarkai už patarimus.