$\alpha + \omega$, 2002, Nr. 1, 71–73

Pasinaudokime dalumo savybėmis

Bronė Narkevičienė, Leonas Narkevičius
leonasn@gim.ktu.lt

Autoriai pateikia uždavinių ir jų sprendimų rinkinį. Visi uždaviniai sprendžiami naudojantis sveikųjų skaičių dalumo savybėmis.

2001 metų trečiame žurnalo numeryje nagrinėjome lyginių ir nelyginių skaičių savybes, kitaip sakant, dalumo iš 2 savybes. Šiame numeryje dalumo temą panagrinėsime išsamiau.

Apibrėžimas. *Sakome, kad sveikasis skaičius m dalijasi iš sveikojo skaičiaus n, jei egzistuoja toks sveikasis skaičius k, kad $m = k \cdot n$.*

Tai užrašome taip: $m \vdots n$ arba $n \mid m$.

Dalumo savybės

1. Jei $b \vdots a$ ir $c \vdots a$, tai $(b+c) \vdots a$;
2. Jei $b \vdots a$, tai $kb \vdots a$;
3. Jei $b_1 \vdots a, b_2 \vdots a, \dots, b_n \vdots a$, tai $(b_1k_1 + b_2k_2 + \dots + b_nk_n) \vdots a$;
4. Jei $b \vdots a$, $c \vdots b$, tai $c \vdots a$;
5. Jei $x \vdots a$ ir $y \vdots b$, tai $xy \vdots ab$.

Visi uždaviniai, kuriuos čia pateikiame, sprendžiami remiantis dalumo savybėmis.

Uždaviniai

1. Duota trupmena $\frac{100!}{3^n}$. Kokia gali būti didžiausia n reikšmė, kad trupmena būtų suprastinama?

2. Žinome, kad $a!$ dalijasi iš 10^{12}. Kokia galima mažiausia a reikšmė?

3. Su kuriomis natūraliosiomis n reikšmėmis reiškinys $\frac{n^2+n+12}{n+1}$ lygus sveikajam skaičiui?

4. Įrodykite, kad su visomis sveikosiomis n reikšmėmis trupmena $\frac{2n+1}{3n+1}$ yra nesuprastinama.

5. Raskite dviženklius skaičius, kurie dalijasi iš savo skaitmenų sandaugos.

6. Patikrinkite, ar skaičius, užrašomas 81 vienetais, dalijasi iš 81.

7. Įrodykite, kad iš 12 paeiliui paimtų skaičių bent vienas yra mažesnis už savo daliklių sumą (imami dalikliai, mažesni už patį skaičių).

8. Skaičius 2002 ir 75 dalijant iš to paties skaičiaus, gaunamos lygios liekanos. Iš kokio skaičiaus galėjo būti dalyta?

9. Ar visada trijų iš eilės einančių natūraliųjų skaičių kubų suma dalijasi iš 9?

10. Iš dviženklio skaičiaus atėmę dviženklį, parašytą tais pačiais skaitmenimis, bet atvirkščia tvarka, gavome natūraliojo skaičiaus kvadratą. Raskite visus tokius skaičius, kuriems galioja ši savybė.

11. Kiek natūraliųjų sprendinių turi lygtis $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$?

12. Ar egzistuoja tokie sveikieji skaičiai x ir y, kurie tenkintų lygtį $x^2 + y^2 = 20...02$?

13. Pirmųjų n natūraliųjų skaičių suma yra triženklis skaičius, kurio visi skaitmenys vienodi. Raskite n.

14. Raskite dviženklį skaičių, kuris lygus savo pirmojo skaitmens ir antrojo skaitmens kvadrato sumai.

15. Išspręskite lygtį $\overline{xyz} = \frac{3}{2}x!y!z!$.

Sprendimai

1. Rasime, iš kokio didžiausio 3 laipsnio dalijasi $100! = 100\cdot 99\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$. Dalijame 100 iš 3. Gautojo skaičiaus sveikoji dalis yra 33, taigi 33 daugikliai 100! išraiškoje dalijasi iš 3. Tačiau, jei skaičius dalijasi iš 9, jis dalijasi ir iš 3^2. Taigi atsiras papildomų trejeto laipsnių. Padalijęs 100 iš 9, gauname, kad yra 11 skaičių, kurie dalijasi iš 9. Analogiškai randame, kad yra 3 skaičiai, kurie dalijasi iš 27, t. y. iš 3^3 ir 1 skaičius, kuris dalijasi iš 81, t. y. iš 3^4. Gauname, kad didžiausias 3 laipsnis, iš kurio dalijasi 100!, yra $n = 33 + 11 + 3 + 1 = 48$.

2. $10^{12} = 2^{12}\cdot 5^{12}$. Imdami paeiliui einančius skaičius, besidalijančių iš 2 gausime daugiau, negu tų, kurie dalijasi iš 5. Todėl ieškosime tokio skaičiaus a, kad $a!$ dalytųsi iš 5^{12}. Paeiliui dauginant skaičius, iš 5 dalysis tie, kurie baigiasi 5 arba 0, t. y. 5, 10, 15, 20, ir t. t. Atrodytų, kad galima pasirinkti 12 tokių skaičių. Tačiau turime pastebėti, kad tarp dauginamųjų skaičių bus ir tokių, kurie dalijasi iš 5^2. Tai skaičiai 25 ir 50. Taigi jau sandauga nuo 1 iki 50 dalijasi iš 5^{12}, kartu ir iš 10^{12}. Todėl mažiausia galima a reikšmė yra lygi 50.

3. Išskirkime nurodyto reiškinio sveikąją dalį:

$$\frac{n^2+n+12}{n+1} = \frac{n(n+1)}{n+1} = n + \frac{12}{n+1}.$$

Šis reiškinys įgys sveikąsias reikšmes tada ir tik tada, kai 12 dalysis iš $n+1$, t. y. kai $n+1$ bus lygus 2, 3, 4, 6, 12, arba n įgys reikšmes 1, 2, 3, 5, 11.

4. Jei trupmena yra suprastinama, tai egzistuoja toks didesnis už 1 skaičius d, iš kurio dalijasi ir skaitiklis, ir vardiklis. Jei du skaičiai dalijasi iš d, tai jų suma ir skirtumas taip pat dalijasi iš d. Tarkime, kad $2n+1$ ir $3n+1$ dalijasi iš d. Tada iš d dalijasi ir jų skirtumas $(3n+1)-(2n+1) = n$, kartu ir skaičius $2n$. Tuomet iš d dalijasi ir skirtumas $(2n+1) - 2n = 1$. Jei 1 dalijasi iš d, tai d gali būti lygus tik 1. Taigi trupmena nesuprastinama.

5. Dviženklį skaičių galime parašyti taip: $10x + y$. Skaičių, gaunamą padalijus dviženklį skaičių iš jo skaitmenų sandaugos, pažymėkime k. Tuomet $10x + y = k\cdot xy$. Išsireiškiame y: $y = \frac{10x}{kx-1}$. Nesunku pastebėti, kad skaičiai x ir $kx - 1$ yra tarpusavyje pirminiai, todėl 10 turi dalytis iš $kx-1$. Taigi $kx-1$ gali būti lygus 1, 2, 5, 10. Kai vardiklis lygus 1, tai y yra dviženklis skaičius, o taip būti negali, nes y yra skaitmuo. Lieka patikrinti reikšmes 2, 5 ir 10. Perrinkę gauname tokius dviženklius skaičius: 11, 12, 15, 24, 36.

6. Skaičiaus N užrašą 81 vienetais suskirstykime į 9 grupes po 9 vienetus. Tada N galėsime užrašyti taip:

$$N = a + a\cdot 10^9 + a\cdot 10^{2\cdot 9} + \cdots + a\cdot 10^{8\cdot 9};$$

čia a skaičius užrašomas devyniais vienetais. Kadangi a skaitmenų suma dalijasi iš 9, tai ir pats skaičius dalijasi iš 9: $a = 9\cdot n$. Tada

$$N = 9(n + n\cdot 10^9 + \cdots + n\cdot 10^{8\cdot 9}).$$

Pakanka įrodyti, kad skaičius

$$M = n + n\cdot 10^9 + \cdots + n\cdot 10^{8\cdot 9}$$

dalijasi iš 9.
Pagalvoję suprasime, kad skaičiaus M skaitmenų suma dalijasi iš 9, taigi ir M dalijasi iš 9.

7. Tarp dvylikos iš eilės paimtų skaičių būtinai yra vienas, kuris dalijasi iš 12. Jei tą skaičių pažymėsime k, tai $\frac{k}{2}$, $\frac{k}{3}$, $\frac{k}{4}$ bus jo dalikliai. Šių daliklių suma lygi $\frac{13k}{12}$, t. y. didesnė už skaičių k. (Galima pastebėti, kad nepanaudojome daliklio $\frac{k}{6}$.)

8. Jei du skaičius dalijant iš to paties skaičiaus d gaunama ta pati liekana, tai jų skirtumas dalijasi iš d. Todėl iš d turi dalytis skirtumas $2002 - 75 = 1927$. Kadangi 1927 yra pirminių skaičių 41 ir 47 sandauga, tai galėjo būti dalyta iš 41 arba iš 47. Be kita ko, 1927 yra ir vieneto bei savęs paties sandauga, todėl ir dalijant iš 1927 gaunamos lygios liekanos.

9. Imkime tris paeiliui einančius natūraliuosius skaičus: $n-1$, n ir $n+1$ ir skaičiuokime jų kubų sumą: $(n-1)^3+n^3+(n+1)^3 = n^3-3n^2+3n-1+n^3+n^3+3n^2+3n+1 = 3n^3+6n = 3n(n^2+2)$. Daugiklis 3 rodo, kad reiškinys dalijasi iš 3. Lieka įrodyti, kad $n(n^2+2)$ taip pat dalijasi iš 3. Jei $n = 3k$, tai dalumas akivaizdus. Jei $n = 3k \pm 1$, tai $n^2+2 = (3k \pm 1)^2+2 = 9k^2 \pm 6k+1+2 = 3(3k^2 \pm 2k+1)$. Šiuo atveju reiškinys $n(n^2+2)$ taip pat dalijasi iš 3, taigi $3n(n^2+2)$ dalijasi iš 9.

10. Pradinį dviženklį skaičių pažymėkime $\overline{xy}$. Tuomet atėminys yra $\overline{yx}$. $\overline{xy}-\overline{yx} = 10x+y-10y-x = 9(x-y)$. Šis skirtumas dalijasi iš 9. Kadangi tai natūraliojo skaičiaus kvadratas, tai skirtumas gali būti lygus 9, 36 arba 81. Tuomet $x-y$ lygus 1, 4 arba 9. Iš pastarojo sprendinių negauname, o įrašę visas galimas reikšmes, su kuriomis skirtumas lygus 1 arba 4, gauname skaičius 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98, 51, 62, 73, 84, 95.

11. Iš lygties išreikškime y:

$$y = \frac{6x}{x-6} = \frac{6x-36+36}{x-6} = 6+\frac{36}{x-6}.$$

Tam, kad y būtų natūralusis skaičius, 36 turi dalytis iš $x-6$. Skaičius 36 dalijasi iš 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 ir 36. Taigi yra 9 tokie skaičiai, todėl lygtis turi 9 sprendinius.

12. Nesunku pastebėti, kad x ir y turi būti vienodo lyginumo. Tuomet x^2-y^2 dalijasi iš 4, o skaičius 20...02 iš 4 nesidalija. Todėl tokie skaičiai neegzistuoja.

13. Uždavinio sąlygą perrašykime taip: $1+2+3+\cdots+n = \overline{kkk}$. Tada gauname $\frac{n(n+1)}{2} = k \cdot 111 = k \cdot 3 \cdot 37$. Čia k yra skaitmuo, todėl jis yra ne didesnis kaip 9. Vienas iš skaičių n arba $n+1$ dalijasi iš 37. Tikrinkime galimas n reikšmes. Pirmiausia patikrinkime atvejį, kai n arba $n+1$ yra lygus 37. Jei $n = 37$, tai $n+1 = 38$ ir šių skaičių sandauga nesidalija iš 3. Lieka $n+1 = 37$, tuomet $n = 36$. Įstatę šią reikšmę, gauname $1+2+3+\cdots+36 = 666$. Patikrinkime atvejį, kai n arba $n+1$ lygus 74. Tuomet $\frac{73 \cdot 74}{2} > 999$ ir ši reikšmė jau yra per didelė. Taigi vienintelė n reikšmė yra 36.

14. Ieškomą skaičių pažymėkime $\overline{xy}$. Tuomet $10x+y = x+y^2$, arba $9x = y^2-y$. Iš čia gauname, kad $y(y-1)$ dalijasi iš 9, o tai įmanoma tik tada, kai y lygus 9. Taigi ieškomasis skaičius yra 89.

15. Kairėje esantis skaičius dalijasi iš 3, todėl $102 \leqslant \overline{xyz} \leqslant 999$, $68 \leqslant \frac{2}{3}\overline{xyz} \leqslant 666$, $68 \leqslant x!y!z! \leqslant 666$. Iš paskutinės nelygybės galime padaryti išvadą, kad skaičiai x, y ir z yra ne didesni už 5 (kitaip bet kurio iš jų faktorialas viršytų 666). Ieškomasis skaičius $\overline{xyz}$ turi dalytis iš 4, nes $x!y!z!$ dalijasi iš 8 (kadangi $x!y!z!$ yra ne mažiau kaip 68). Kadangi $\overline{xyz}$ yra lyginis, tai z galimos reikšmės yra 2 arba 4. Jei $z = 2$, tai $y = 1$, arba 3, arba 5, nes $\overline{yz}$ turi dalytis iš 4. Jei $z = 4$, tai y lygus 2 arba 4. Taigi $\overline{yz} = 12, 32, 52, 24, 44$. Į sąlygos lygtį įrašę y, z ir $\overline{yz}$ reikšmes, randame, kad tik kai $\overline{yz} = 32$, yra galima x reikšmė, kuri lygi 4. Kitais atvejais x reikšmių nėra. Lygties sprendiniai yra $x = 4$, $y = 3$, $z = 2$.