$\alpha + \omega$, 2002, Nr. 1, 67–70

# *Sumuojame natūraliųjų skaičių atvirkštinius*

Juozas Mačys
jmacys@ktl.mii.lt

*Straipsnyje pateikiama keletas skaičiaus $\frac{1}{2}$ skleidinių skirtingų dėmenų $\frac{1}{n^2}$ suma. Įdomu, kad jie gauti ne spaudant skaičiuoklio mygtukus, bet nagrinėjant skaičių sąryšius!*

Nesunku įsitikinti, kad paėmus pakankamai daug dėmenų suma

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

pasidarys didesnė už bet kurį skaičių. Iš tikrųjų, jeigu $n = 4$, tai

$$H_4 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2.$$

Jeigu $n = 8$, tai

$$H_8 = H_4 + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) > 2 + 4 \cdot \frac{1}{8} > 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

Jeigu $n = 16$, tai

$$H_{16} = H_8 + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{16}\right) > H_8 + 8 \cdot \frac{1}{16} > \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = \frac{6}{2}.$$

Ir apskritai, jeigu imsime $n = 2^k$, tai (indukcija!)

$$H_{2^k} > \frac{k+2}{2} = \frac{1}{2} \cdot k + 1.$$

Vadinasi, jei norime gauti sumą, didesnę už 100, tai užtenka imti $2^{200}$ dėmenų; o jeigu norime gauti sumą, didesnę už 1000, tai tikrai užteks $2^{2000}$ dėmenų.

Panašiai elgiasi ir sumos

$$K_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}.$$

Iš tikrųjų,

$$K_n > \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \cdot H_n,$$

todėl paėmę $n$ pakankamai didelį galime taip pat gauti kiek norima didelę sumą $K_n$.

Visai kitaip elgiasi sumos

$$Q_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}.$$

Nesunku įrodyti, kad nors ir kokį didelį imsime $n$, visada $Q_n < 2$. Iš tikrųjų,

$$\begin{aligned}
Q_n &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = \\
&= 1 + \frac{2-1}{1\cdot 2} + \frac{3-2}{3\cdot 2} + \dots + \frac{n-(n-1)}{(n-1)n} = \\
&= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \\
&= 2 - \frac{1}{n} < 2.
\end{aligned}$$

Pasirodo, kad imant $n$ pakankamai didelį suma $Q_n$ pasidaro kiek norima artima $\frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}64\dots$ (čia $\pi = 3{,}14\dots$ — garsusis skaičius, rodantis, kiek kartų apskritimo ilgis didesnis už skersmenį).

Galima įrodyti, kad nors ir kokį $n$ imsime, sumos $H_n$, $K_n$ ir $Q_n$ niekada (t. y. su jokiu $n \in N$) nebus lygios sveikajam skaičiui (beje, sumai $Q_n$ tai akivaizdu, nes $1 < Q_n < 2$, kai $n \geqslant 2$).

Kelkime klausimą kiek kitaip: ar galima gauti sveikąjį skaičių, jeigu į sumą dėmenys imami ne visi iš eilės, o tik kai kurie?

Nagrinėjant natūraliųjų skaičių atvirkštinius, atsakymas teigiamas: juos sudedant galima gauti bet kurį natūralųjį skaičių. Kvadratų atvirkštinių atveju galima tik ieškoti sumos, lygios, pavyzdžiui, $\frac{3}{2}$ (o atmetus vienetą — sumos, lygios $\frac{1}{2}$), nes dėmenų „neužtenka“ — jų suma visada mažesnė už 2 (ir kaip minėjome, net už 1,65).

XVI komandinėje Lietuvos moksleivių matematikos olimpiadoje (2001 11 06, Vilniaus universitete) buvo pateiktas toks uždavinys:

*Ar galima $\frac{1}{2}$ užrašyti baigtine suma $\frac{1}{n_1^2} + \frac{1}{n_2^2} + \dots + \frac{1}{n_k^2}$, kai $n_1, n_2, \dots, n_k$ — skirtingi natūralieji skaičiai?*

Uždavinio neišsprendė nė viena komanda, o kai kam net pasirodė, kad be kompiuterio čia apsieiti negalima. Iš tikrųjų uždavinys visai nesunkus, ir jam išspręsti nereikia nė skaičiuoklio...

Pirma, kas ateina į galvą — veikti gobšuoliškai ir į sumą imti kuo didesnius dėmenis. Tai tas pat, kas iš $\frac{1}{2}$ atiminėti kuo didesnius dėmenis. Taigi:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^2}, \\
&\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} = \frac{5}{2^2\cdot 3^2}, \\
&\frac{5}{2^2\cdot 3^2} - \frac{1}{4^2} = \frac{11}{2^4\cdot 3^2}, \\
&\frac{11}{2^4\cdot 3^2} - \frac{1}{5^2} = \frac{275-144}{2^4\cdot 3^2\cdot 5^2} = \frac{131}{2^4\cdot 3^2\cdot 5^2}, \\
&\frac{131}{2^4\cdot 3^2\cdot 5^2} - \frac{1}{6^2} = \frac{131 - 2^2\cdot 5^2}{2^4\cdot 3^2\cdot 5^2} = \frac{31}{2^4\cdot 3^2\cdot 5^2} = \frac{31}{3600}.
\end{aligned}$$

Bet $\frac{31}{2^4\cdot 3^2\cdot 5^2} = \frac{31}{3600} < \frac{1}{100}$, todėl toliau galėtų eiti tik $11^2$ ar daugiau.

Vardiklis $11^2$ tarsi „neperspektyvus" — atimant $\frac{1}{11^2}$ labai didėja bendrasis vardiklis. Todėl imkime $12^2$:

$$\frac{31}{2^4\cdot 3^2\cdot 5^2}-\frac{1}{12^2}=\frac{31-25}{2^4\cdot 3^2\cdot 5^2}=\frac{6}{2^4\cdot 3^2\cdot 5^2}.$$

Jeigu skaitiklyje stovėtų 5, uždavinys būtų išspręstas: $5=4+1$, ir dėmuo 4 susiprastintų. Dabar turime $6=4+1+1$, ir

$$\frac{6}{2^4\cdot 3^2\cdot 5^2}=\frac{1}{2^2\cdot 3^2\cdot 5^2}+\frac{1}{2^4\cdot 3^2\cdot 5^2}+\frac{1}{2^4\cdot 3^2\cdot 5^2}.$$

Bėda čia ta, kad paskutiniai du dėmenys vienodi. Bet juk paskutinį dėmenį nesunku „susmulkinti" — prisiminę, kad $3^2+4^2=5^2$, gauname

$$\frac{1}{2^4\cdot 3^2\cdot 5^2}=\frac{5^2}{2^4\cdot 3^2\cdot 5^4}=\frac{3^2+4^2}{2^4\cdot 3^2\cdot 5^4}=\frac{1}{2^4\cdot 5^4}+\frac{1}{2^2\cdot 3^2\cdot 5^4}.$$

Taigi gavome skleidinį

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{12^2}+\frac{1}{30^2}+\frac{1}{60^2}+\frac{1}{100^2}+\frac{1}{150^2}, \tag{1}$$

ir uždavinys išspręstas — skaičių $\frac{1}{2}$ tikrai galima užrašyti nevienodų kvadratų atvirkštinių suma.

Bet dabar jau tapome gudresni ir galime pamėginti grįžti prie „neperspektyvaus" $11^2$:

$$\frac{31}{2^4\cdot 3^2\cdot 5^2}-\frac{1}{11^2}=\frac{31\cdot 11^2-60^2}{2^4\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 11^2}=\frac{151}{2^4\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 11^2}.$$

Mūsų tikslas — išreikšti 151 tokių skirtingų kvadratų suma, kad vardiklis dalytųsi iš dėmenų. Rašykime sumą $1+4+9+16+25+36+\underline{49}+\underline{64}+\underline{81}+100+121+\underline{144}$. Dėmenis 49, 64, 81 išbraukime kaip netinkamus. Dėmens 144 į sumą imti negalima — liks 7. O štai 121 imti galima — lieka 30, ir 30 išreikšti kvadratų suma galima net dviem būdais: $30=25+4+1=16+9+4+1$. Tiesa, antras būdas neįdomus — čia dėmuo 25 suskaldytas į smulkesnius 16 ir 9. Galima imti ir 100 — lieka 51, ir $51=25+16+9+1$.

Taigi gavome dar du skleidinius:

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{60^2}+\frac{1}{132^2}+\frac{1}{330^2}+\frac{1}{660^2}, \tag{2}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{66^2}+\frac{1}{132^2}+\frac{1}{165^2}+\frac{1}{220^2}+\frac{1}{660^2}. \tag{3}$$

Paskutinis blogesnis už (2) skleidinį tuo, kad turi 11 dėmenų. Iš (1) ir (2) 10-ies dėmenų skleidinių pirmenybę galima atiduoti pirmajam — jo paskutinis vardiklis mažesnis.

Apskritai skleidinio „grožį" vertinti galima pagal du kriterijus: A) dėmenų turi būti kuo mažiau, ir B) didžiausias vardiklis turi būti kuo mažesnis.

Pasirodo, didžiausią vardiklį galima gauti ne tik 150, bet ir 120, tik tam sumuojant reikia sustoti ties $5^2$. Jau matėme, kad

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}-\frac{1}{5^2}=\frac{131}{60^2}.$$

Atėmę $\frac{1}{6^2}$, gavome skaidinį su vardikliu $150^2$. Kadangi $\frac{1}{7^2}$ atimti negalima — bendrasis vardiklis taps $420^2$ — tai bandykime atimti $\frac{1}{8^2}$:

$$\frac{131}{60^2}-\frac{1}{8^2}=\frac{524-225}{120^2}=\frac{299}{120^2}.$$

Vėl bandykime išreikšti 299 patogių (skaičiaus 120 daliklių) kvadratų suma. Rašome sumą $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 64 + 100 + 144 + 225$. Didesnių dėmenų imti negalime — jie didesni už 299. Negalime imti ir 225, nes $120 : 15 = 8$, o dėmenį $\frac{1}{8^2}$ jau sykį ėmėme. Imti 144 privalu — kitaip 299 nebesurinksime. Lieka gauti 155. Kadangi $1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$, tai reikia dar 100 ir į sumą verta imti vieną dėmenį 100, o ne $36 + 64$. Gavome lygybę

$$299 = 12^2 + 10^2 + 5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1,$$

taigi ir skleidinį

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{24^2} + \frac{1}{30^2} + \frac{1}{40^2} + \frac{1}{60^2} + \frac{1}{120^2}.$$

Įrodyti, kad didžiausias vardiklis visada ne mažesnis už $120^2$, — sunku. Taip pat sunku įrodyti, kad 9 dėmenų neužtenka. Žinoma, tuo įsitikinti galima kompiuteriu.

Kur kas lengvesnis ir įdomesnis analogiškas uždavinys su nelyginiais vardikliais:

*Išreikškite vienetą suma kuo mažesnio skaičiaus skirtingų dėmenų, atvirkštinių nelyginiams skaičiams.*

Šis uždavinys buvo patekęs į „Baltijos kelio“ olimpiados svarstytinų uždavinių sąrašą, bet nebuvo paimtas į galutinį komplektą argumentuojant, kad skaičiuokliais naudotis negalima.

Išspręskite šį uždavinį ir įsitikinsite, kad skaičiuoklis čia padeda labai nedaug.

## RAŠYKITE MUMS

Jeigu Jums nepavyksta išspręsti aukščiau pateikto olimpiadinio uždavinio, nenusiminkite ir pabandykite išspręsti lengvesnį.

O buvo taip. Vieną dieną vienos apskrities vienos mokyklos viena mokytoja vieno metodinio susirinkimo metu paklausė vieno iš X klasės naujojo matematikos vadovėlio autorių, kaip spręsti tame vadovėlyje nurodytą uždavinį (žr. *Matematika* 10, II dalis, p. 107):

**79a uždavinys.** *Siuvykla per tam tikrą laiką turėjo pasiūti* 160 *kostiumų. Priėmus į darbą dar* 2 *siuvėjus, užduotis buvo įvykdyta* 4 *dienomis anksčiau, negu planuota. Per kiek dienų siuvykla planavo užbaigti darbą?*

Iš pradžių šį uždavinį iš inercijos neteisingai sprendė ir to uždavinio autorius, ir to vadovėlio redaktorius. Pasirodo, uždavinys ne toks, kaip iš pradžių atrodo!

Laukiame laiškų!

*Valdas Vanagas*